INSTITUT NON LINEAIRE DE NICE
UMR CNRS 129
Université de Nice Sophia Antipolis - Parc Valrose
F-06034 Nice cedex

INLN 91.41

September 1991

Bifurcation d'orbites périodiques à partir d'un cycle homocline symétrique

A. Scheel, P. Chossat

Bifurcation d'orbites périodiques à partir d'un cycle homocline symétrique

A. Scheel, P. Chossat
I.N.L.N. (UA CNRS 129)
Université de Nice
Parc Valrose F-06035 Nice Cedex

Résumé. *On adapte une méthode développée par Deng pour l'étude des bifurcations à partir d'une orbite homocline, au cas d'un cycle homocline structurellement stable "forcé" par symétrie. On montre notamment que la condition de "twist" sur le flot au voisinage de l'orbite, qui conduit dans le cas non symétrique à la bifurcation d'orbites périodiques doubles, possède ici une interprètation différente, en termes de symétrie des orbites périodiques bifurquées.*

Abstract. *We adapt a method developped by Deng for the study of the bifurcation from a homoclinic orbit, to the case of a structurally stable homoclinic cycle forced by a symmetry. We show in particular that the condition of "twist" on the flow near the orbit, which leads to the bifurcation of periodic orbits with doubled period, has in our case a different meaning, in terms of the symmetry of the bifurcated periodic orbits.*

Abridged english version: bifurcation of periodic orbits from a symmetric homoclinic cycle

A vector field :

$$\dot{X} = F(X), \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \tag{1}$$

equivariant under the action of a finite group $\Gamma \subset \mathcal{O}(n)$, is said to have a *homoclinic cycle* if:

$$(i) \quad \exists p_0, p_1 \in \mathbb{R}^n \text{ and } \sigma \in \Gamma, \text{ s.t. } F(p_0) = 0 \text{ et } \sigma p_0 = p_1$$

$$(ii) \quad \exists q_0 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & q_0(t) \end{cases}, \text{ solution of (1) s.t.}$$

$$\lim_{t \to +\infty} q_0(t) = p_1 \text{ and } \qquad \lim_{t \to -\infty} q_0(t) = p_0.$$

The homoclinic cycle is then $Q = \{\gamma q_0(t) | \gamma \in \Gamma, t \in \mathbb{R}\}$. Q is clearly Γ-invariant. Moreover, Γ being a discrete group, for all $\sigma \in \Gamma$ such that $\sigma p_0 = p_1$, the set $Q_\sigma = \{\sigma^i q_0(t) | t \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}\}$ forms a dynamical cycle. Two elements σ et σ' transform p_0 in p_1 iff $\sigma\sigma'^{-1}$ is in the isotropy subgroup of p_0.

For $x \in \mathbb{R}^n$, we denote $Fix(G_x)$ the subspace of points which are fixed under the action of the isotropy subgroup G_x of x. Notice that, by the Γ-equivariance of F, $Fix(G_x)$ is invariant by F. Let us now set $\Sigma = Fix(G_{q_0(t)})$ (independant of t). If p_1 is a sink in Σ, the cycle Q is *structurally stable* (str.st.) in the class of Γ-équivariant vector fields.

Such cycles appear naturally in the study of differential systems related to physical phenomena. This is e.g. the case for the cycle studied in [3] for vector fields in $\mathbb{R}^3$, equivariant

by the group $\mathbb{Z}_3.\mathbb{Z}_2^3$ where $\mathbb{Z}_3$ permutes circularly the 3 axis of coordinates and each $\mathbb{Z}_2$ is a reflection with respect to one plane of coordinates. In such a case, planes of coordinates are also planes of symmetry. Moreover, a Γ-orbit of equilibria can exist on the coordinate axis as well as heteroclinic connections between these points in the planes of symmetry, hence realizing a str. st. homoclinic cycle.
Such a heteroclinic cycle can be attracting. For this a sufficient condition is that the spectrum of the operator $DF(p_0)$ consists of eigenvalues $-\mu_k$ ($k = 0, ..., n-2$) and ν such that $0 < Re\nu < Re\mu_0 \leq ... \leq Re\mu_{n-2}$ (see [4],[5]).

The question which we ask in this note is the following: suppose that F dépends on a parameter α and that the above condition be fullfilled for e.g. $\alpha < 0$, what will happen if at $\alpha = 0$ the eigenvalues $-\mu_0(\alpha)$ and $\nu(\alpha)$ become resonant, i.e. if $Re\mu_0(0) = Re\nu(0)$? The following theorem answers this question in the case of *real and simple* $-\mu_0$ and ν. One has essentially adapted a method of Deng (see [1] and [2]) for a homoclinic orbit without symmetry. In this case, under a set of conditions given in [1], a branch of periodic orbits can bifurcate from the homoclinic orbit. Moreover this orbit can be either simple (i.e. correspond to a fixed point of the associated Poincaré map) or double (i.e. correspond to a double point of the Poincaré map). In our case, this property is replaced by a property on the symmetry of the bifurcated periodic orbits. We now state the theorem, under the following additional assumptions: (i) F depends smoothly on a parameter α and has a str. st. homoclinic cycle Q for α close to 0, (ii) the trajectory $q_0(t)$ is tangent to $E^u(p_0)$ for $t \to -\infty$ and to $E^s(p_1)$ for $t \to \infty$, (iii) the vector field is *generic* in the class of smooth Γ-equivariant v.f.

Theorem

Let $\sigma \in \Gamma$ s.t. $\sigma p_0 = p_1$ and κ be an element of G_{p_0} acting as $-Id$ in $E^s(p_0)$. Under the foregoing hypothesis, a branch of periodic orbits bifurcates from Q at $\alpha = 0$, of period T close to ∞, whose trajectory $P_\alpha(t)$ posses one of the 2 following symmetries, depending on the sign of a coefficient in the bifurcation equation: 1) it is close to Q_σ and $P_\alpha(t + \frac{T}{N}) = \sigma P_\alpha(t)$, 2) it is close to $Q_{\sigma\kappa}$, and $P_\alpha(t + \frac{T}{N}) = \sigma\kappa P_\alpha(t)$, where N is the smallest integer s.t. $\sigma^N p_0 = p_0$. Each of these periodic orbits spans by symmetry a Γ-orbit of periodic orbits. Moreover, any bifurcated periodic orbit belongs to one of these two types.

Example. In the case of the cycle studied in [3], σ is e.g. the rotation of angle $\frac{2\pi}{3}$ around the axis $(1,1,1)$ (which generates $\mathbb{Z}_3$) and κ is the reflexion with respect to one of the symmetry planes in $\mathbb{R}^3$. Notice that σ is of order 3, while $\sigma\kappa$ is of order 6, hence in the second case the periodic orbits visit all the equilibria of the cycle Q. Notice however that the symmetry planes separate the vector field in $\mathbb{R}^3$, therefore only those orbits with σ symmetry type can exist. This restriction disappears if F is an equivariant vector field in higher dimension.

Position du problème

Etant donné un champ de vecteurs :

$$(1) \qquad \dot{X} = F(X), \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

équivariant par l'action d'un groupe discret $\Gamma \subset \mathcal{O}(n)$, on dit que F possède un *cycle homocline* si:

$$(i) \quad \exists p_0, p_1 \in \mathbb{R}^n \text{ et } \sigma \in \Gamma, \text{ tq } F(p_0) = 0 \text{ et } \sigma p_0 = p_1$$

$$(ii) \quad \exists q_0 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \quad q_0(t) \end{cases}, \text{ solution de (1) tq}$$

$$\lim_{t\to+\infty} q_0(t) = p_1 \text{ et } \qquad \lim_{t\to-\infty} q_0(t) = p_0.$$

Le cycle homocline est alors $Q = \{\gamma q_0(t) | \gamma \in \Gamma, t \in \mathbb{R}\}$. Il est clair que Q est Γ-invariant. De plus, Γ étant un groupe discret, pour tous $\sigma \in \Gamma$ tel que $\sigma p_0 = p_1$, l'ensemble $Q_\sigma = \{\sigma^i q_0(t) | t \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}\}$ forme un cycle dynamique. Deux éléments σ et σ' transportent p_0 en p_1 ssi $\sigma\sigma'^{-1}$ est dans le sous-groupe d'isotropie de p_0.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $Fix(G_x)$ le sous-espace des points fixés par l'action du sous-groupe d'isotropie G_x de x. On remarquera que la Γ-équivariance de F entraîne que $Fix(G_x)$ est invariant par F. Soit à présent $\Sigma = Fix(G_{q_0(t)})$ (indépendant de t). Si p_1 est un puit dans Σ, le cycle Q est ***structurellement stable*** (str.st.) dans la classe des champs de vecteurs Γ-équivariants.
De tels cycles apparaissent naturellement dans l'étude de certains systèmes différentiels liés à des phénomènes physiques. C'est le cas par exemple du cycle étudié dans [3] pour des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, équivariants par l'action du groupe $\mathbb{Z}_3.\mathbb{Z}_2^3$ où $\mathbb{Z}_3$ permute circulairement les 3 axes de coordonnées et chaque $\mathbb{Z}_2$ est une réflexion par rapport à un des 3 plans de coordonnées. Dans ce cas, les plans de coordonnées sont aussi des plans de symétrie. De plus des points d'équilibre conjugués par symétrie peuvent exister sur les axes de coordonnées ainsi que des connexions hétéroclines entre ces points dans les plans de coordonnées, réalisant ainsi un cycle homocline str.st.
Un cycle homocline peut être (asymptotiquement) stable, c.à.d. localement attractant. Il suffit par exemple pour cela que le spectre de l'opérateur $DF(p_0)$ consiste en valeurs propres $-\mu_k$ ($k = 0, ..., n-2$) et ν telles que $0 < Re\nu < Re\mu_0 \leq ... \leq Re\mu_{n-2}$ (voir [4],[5]).

La question posée dans cette note est la suivante: supposons que F dépende d'un paramètre α et que la condition ci-dessus soit vérifiée pour $\alpha < 0$ (par ex.), que se passe-t-il si pour $\alpha = 0$ les valeurs propres $-\mu_0(\alpha)$ et $\nu(\alpha)$ deviennent résonantes, c.a.d. si $Re\mu_0(0) = Re\nu(0)$? Le théorème suivant répond à cette question dans le cas où les valeurs propres $-\mu_0$ et ν sont ***réelles et simples***. On a essentiellement adapté la méthode développée par Deng (voir [1] et [2]) dans le cas d'une orbite homocline sans hypothèse de symétrie. Dans ce cas, sous des conditions précisées dans [1], une orbite périodique peut bifurquer à partir de l'orbite homocline. De plus cette orbite peut être simple (c.a.d. correspondre à un point fixe de l'application de Poincaré associée) ou double (c.a.d. correspondre à un point de période 2 pour l'application de Poincaré). Dans notre cas cette propriète est remplacée par une propriète sur la symétrie des orbites périodiques bifurquées.

Hypothèses:

1. Le champ de vecteurs F dépend de facon régulière d'un paramètre réel α et possède, pour α voisin de 0, un cycle homocline Q str.st. (au sens défini plus haut) qui connecte

les points d'équilibre p_0, $p_1 = \sigma p_0$, etc..., dans la Γ-orbite de p_0.

2. Résonance dans le spectre des valeurs propres dominantes:

$$spec(DF(p_i)) = \{\nu(\alpha), -\mu_0(\alpha), (-\mu_k(\alpha))_{1 \leq k \leq n-2}\}$$

où $\nu(\alpha)$ et $-\mu_0(\alpha)$ sont des valeurs propres rélles simples dans un voisinage de $\alpha = 0$, et de plus vérifient les relations $\nu(0) = \mu_0(0) > 0, \nu'(0) \neq -\mu_0'(0)$ et $Re\ \mu_k(0) > \mu_0(0)$ pour tout k.

On note les sous-espaces orthogonaux associés aux valeurs propres $\nu, -\mu_0$, resp. $(-\mu_k)_k$ du point p_i:

$$E^u(p_i),\ E^s(p_i)\ , \text{resp. } E^{ss}(p_i).$$

Ils sont invariants par $DF(p_i)$ et par l'action du sous-groupe d'isotropie G_{p_i}. En particulier, comme $\dim E^s(p_i) = 1$, G_{p_i} agit sur cet espace comme $\{+Id, -Id\}$.

3. La trajectoire $q_0(t)$ est tangente à $E^s(p_0)$ pour $t \to -\infty$ et à $E^s(p_1)$ pour $t \to \infty$.

4. Le champ de vecteurs F est générique dans l'espace des champs C^∞ et Γ-équivariants.

Théorème

Soient $\sigma \in \Gamma$ tel que $\sigma p_0 = p_1$ et $\kappa \in G_{p_0}$ qui agit comme $-Id$ dans $E^s(p_0)$. Sous les hypothèses 1 à 4, il y a bifurcation en $\alpha = 0$ d'une branche d'orbites périodiques de l'équation (1), de période T proche de ∞, dont la trajectoire $P_\alpha(t)$ possède l'une des 2 symétries suivantes, en fonction du signe d'un coefficient dans l'équation de bifurcation: 1) elle est voisine de Q_σ et $P_\alpha(t + \frac{T}{N}) = \sigma P_\alpha(t)$, 2) elle est voisine de $Q_{\sigma\kappa}$, et $P_\alpha(t + \frac{T}{N}) = \sigma\kappa P_\alpha(t)$, où N est le plus petit entier tel que $\sigma^N p_0 = p_0$. Chacune de ces orbites périodiques engendre par symétrie une Γ-orbite d'orbites périodiques. De plus, toute orbite périodique bifurquée est d'un des types ci-dessus.

Exemple. Dans le cas du cycle étudié dans [3], σ sera par ex. la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe $(1,1,1)$ (qui engendre $\mathbb{Z}_3$) et κ la réflexion par rapport à l'un des plans de symétrie dans $\mathbb{R}^3$. Notons que σ est d'ordre 3, tandis que $\sigma\kappa$ est d'ordre 6, donc dans le deuxième cas les orbites périodiques "visitent" tous les points du cycle Q. Remarquer cependant que les plans de symétrie sont des "séparateurs" du champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, par conséquent seules les orbites avec symétrie de type σ peuvent bifurquer. Cette restriction disparaît si F est un champ de vecteur équivariant dans un espace de dimension supérieure.

Démonstration du théorème

On va énoncer un certain nombre de résultats intermèdiaires dont la démonstration est faite dans [6], et qui sont pour l'essentiel une simple adaptation de résultats de [1].

1. *L'idée.* Pour tout $i = 1, ..., N$, il existe un changement de variables (X,t) G_{p_i}-équivariant dans un voisinage de p_i, tel que : i) $p_i(\alpha) = p_i(0)$ et (ii) les variétés stables et instables sont les sous-espaces linéaires E^u et $E^s \times E^{ss}$. Au voisinage des équilibres p_i le flot est décrit en variables locales $X = (z, y, x) \in E^u \times E^s \times E^{ss}$ par

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{z} = & (1+\alpha)z & +f_z(z,y,x,\alpha) \\ \dot{y} = & -y & +f_y(z,y,x,\alpha) \\ \dot{x} = & -A(\alpha)x & +f_x(z,y,x,\alpha) \end{cases}$$

où f_x, f_y, f_z sont d'ordre $0(\|X\|^2)$ et vérifient

$$f_x(z,0,0,\alpha) = f_y(0,y,x,\alpha) = f_z(0,y,x,\alpha) = 0.$$

Dans un voisinage V de p_0 on peut définir les sections de Poincaré suivantes, dépendant de $\delta \in \mathbb{R}^+$:

$$S^0_{in} = \{(z,y,x)|y = \delta\} \cap V$$
$$S^0_{out} = \{(z,y,x)|z = \delta\} \cap V$$

de telle sorte que S^0_{out} soit invariante par G_{q_0} et S^0_{in} par $G_{\sigma^{-1}q_0}$. Au voisinage de p_i, on définit de la même facon les variables locales (z^i, y^i, x^i). On choisit l'orientation de $E^s(p_i)$ telle que $S^i_{in} = \{(x^i, y^i, z^i)|y^i = \delta\} = \sigma^i S^0_{in}$, $i = 0, ..., N-1$. De même on pose $S^i_{out} = \sigma^i S^0_{out}$. On note (x^i_{in}, z^i_{in}) (resp. (x^i_{out}, y^i_{out})) les variables dans S^i_{in} (resp. S^i_{out}). On aimerait identifier par symétrie S^1_{in} avec S^0_{in}, et définir une "application de Poincaré" $\Psi : U \subset S^0_{in} \mapsto S^0_{in}$ par le flot dans un voisinage de p_0. Les points périodiques de Ψ correspondraient alors (par équivariance) aux orbites périodiques proches du cycle homocline. Cependant Ψ est singulière sur q_0, ce qui introduit une difficulté traitée dans [2] par la "méthode de S'ilnikov".

2. *La méthode de S'ilnikov équivariante.* On considère d'abord le flot entre un voisinage de p_i dans S^i_{in} et la section S^i_{out}. Soit s le "temps de vol" correspondant et $r_i = e^{-s}$. Pour δ assez petit, les coordonnées z^i_{in}, x^i_{out}, y^i_{out} sont des fonctions au moins C^1 de $x_i = x^i_{in}$, r_i et α quand r_i et α tendent vers 0 (voir [6] pour une estimation précise). De plus ces fonctions commutent avec l'action de G_{p_i} (par unicité des solutions). On considère ensuite le flot dans un voisinage de q_i, entre S^i_{out} et S^{i+1}_{in}. La connexion hétérocline $q_i(\alpha)$ entre p_i et p_{i+1} intersecte resp. S^i_{out} et S^{i+1}_{in} en $(x^i_{out}, y^i_{out}) = (0,0)$ et $(x^{i+1}_{in}, z^{i+1}_{in}) = (a_x(\alpha), 0)$. Si δ a été choisi assez petit, $(a_x(\alpha), 0) \in S^{i+1}_{in}$. Le flot entre ces sections définit un difféomorphisme local C^∞ dans une boule B_i autour de $(a_x(\alpha), 0)$ dans S^i_{out}, telle que $B_{i+1} = \sigma B_i$, à valeurs dans S^{i+1}_{in}:

$$\Pi_i : \left\{ \begin{array}{ccc} B_i \subset S^i_{out} \times (-\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) & \to & S^{i+1}_{in} \\ ((x^i_{out}, y^i_{out}), \alpha) & \mapsto & \Pi_i((x^i_{out}, y^i_{out}), \alpha), \end{array} \right.$$

Notons que Π_i est équivariant par $G_{p_i} \cap G_{p_{i+1}}$. De plus, $\Pi_{i+1} = \sigma \Pi_i \sigma^{-1}$, ces applications sont donc identiques en variables locales. La partie affine de Π_i s'écrit

$$\left. \begin{array}{llll} z^{i+1}_{in} & = a_z & +b_{zx} x^i_{out} & +b_{zy} y^i_{out} \\ x^{i+1}_{in} & = a_x & +b_{xx} x^i_{out} & +b_{xy} y^i_{out} \end{array} \right\} + O(|x^i_{out}|^2 + |y^i_{out}|^2).$$

où les coefficients dépendent de facon régulière de α.

Dans la suite on pose $\mathbf{r} = (r_0, ..., r_{N-1})$ et $\mathbf{x} = (x_0, ..., x_{N-1})$. Une orbite périodique, bifurquant au voisinage du sous-cycle Q_σ, correspond à une solution $(\mathbf{r}, \mathbf{x})(\alpha)$ du système

$$\Pi_i((x^i_{out}, y^i_{out})(r_i, x_i, \alpha), \alpha) = (x^{i+1}_{in}, z^{i+1}_{in})(r_{i+1}, x_{i+1}, \alpha)$$

telle que $(x^i_{out}, y^i_{out}) \in B_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ $(mod\ N)$. Tenant compte de l'équivariance par σ du flot qui permet d'identifier les sections par symétrie, il s'agit donc de résoudre le système

$$(3) \qquad \sigma^{-1}\Pi((x_{out}, y_{out})(r_i, x_i, \alpha), \alpha) = (x_{in}, z_{in})(r_{i+1}, x_{i+1}, \alpha) \quad i \in \mathbb{Z}\ (mod\ N).$$

On remplace dans (3) x_{out}, y_{out} et z_{in} par leurs développements en $(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \alpha)$. Les équations pour x_{i+1} sont facilement résolues par le théorème des fonctions implicites et donnent $x_i(\mathbf{r}, \alpha) = a_x(\alpha) + O(\mathbf{r})$. En portant ces expressions dans les autres équations, on obtient le système

$$r_{i+1}^{1+\alpha} A(\alpha) = r_i(B(\alpha) + O(\mathbf{r}^{\omega})) \tag{4}$$

où $A(\alpha) = \delta + O(\delta^2)$, $B(\alpha) = b_{zy}\delta + b_{zx}\varphi_x + b_{zy}\varphi_y$ avec $\varphi_x = \varphi_y = O(\delta^2)$, et ω est tel que $0 < \omega < \min\limits_{\alpha}\{1 + \alpha, 1\}$. Remarquons que $\mathbf{r} = 0$ est solution, correspondant au cycle Q_σ lui-même.

Lemme. Considérons les équations

$$r_i^{\alpha} = c(\alpha) + \phi(\mathbf{r}, \alpha), \qquad i \in \mathbf{Z}\ (mod\ N)$$

avec $c \in C^1$, $\omega > 0$, $\phi(r, \alpha) = O(\mathbf{r}^{\omega}), D_{r_k}\phi(\mathbf{r}, \alpha) = O(\mathbf{r}^{\omega} + r_k^{\omega - 1})$ pour $\mathbf{r} \geq 0$, et supposons que $0 \leq c(0) < 1$. Alors, si $\alpha > 0$, il existe une branche de solutions unique $r_i(\alpha) = \tau(\alpha)^{1/\alpha}$, $\tau(\alpha) \in C^1$ et $\tau(0) = c(0)$. Si $\alpha < 0$, il n'y a pas de solution avec $\mathbf{r}$ petit.

Démonstration: on pose $r_i = \tau_i^{1/\alpha}$ et $\phi(\tau^{1/\alpha}, \alpha) = 0$ pour $\alpha < 0$. Compte-tenu des hypothèses, le théorème des fonctions implicites s'applique et donne l'unique solution $\tau_i = \tau(\alpha)$ au voisinage de $\tau(0) = c(0)$, sous la condition $0 \leq c(0) < 1$.

Remarquons que $A(0) > 0$, d'où, grâce au lemme, la c.n.s. $B(0) > 0$ d'existence et unicité des solutions bifurquées de (4), qui de plus sont invariantes par σ.

3. *Les types de symétrie des orbites périodiques bifurquées.* Soit $\tilde{\sigma} \in \Gamma$ un autre élément tel que $\tilde{\sigma} S_{in}^0 = S_{in}^1$. Donc $\kappa = \sigma^{-1}\tilde{\sigma} \in G_{p_0}$ et laisse S_{in}^0 invariant. Par construction κ agit trivialement dans $E^s(p_0)$, mais comme Id ou $-Id$ dans $E^u(p_0)$. En notant κ_x l'action de κ dans $E^{ss}(p_o)$ et $\epsilon = +1$ ou -1 selon le cas, l'equation (3) pour $\tilde{\sigma}$ est équivalente à

$$\sigma^{-1}\Pi\big((x_{out}, y_{out})(r_i, x_i, \alpha), \alpha\big) = (\kappa_x x_{in}, \epsilon z_{in})(r_{i+1}, x_{i+1}, \alpha).$$

On vérifie aisément que le signe de $A(0)$ est inchangé dans l'équation de bifurcation (4), tandis que le signe de $B(0)$ change avec celui de ϵ. Par conséquent dans tous les cas génériques, il existe une branche d'orbites périodiques bifurquées, dont le type de symétrie dépend seulement du signe de $B(0)$.

Il reste à montrer que les orbites bifurquées suivent nécessairement un sous-cycle Q_σ. On considère pour cela un cycle $q_0, ..., q_N$ tel que $q_1 = \sigma q_0$ et on suppose l'existence d'une orbite périodique bifurquée au voisinage de ce cycle. Il y a deux possibilités a priori pour q_2, correspondant à l'une ou l'autre des branches de la variété instable de p_1: $q_2 = \sigma q_1$ ou $q_2 = \tilde{\sigma} q_1$. En fait le second cas est impossible, car il implique qu'on ait trouvé des solutions bifurquées des équations $r_1^{1+\alpha}A = r_0(B + O(\mathbf{r}^{\omega}))$ et $-r_2^{1+\alpha}A = r_1(B + O(\mathbf{r}^{\omega}))$, ce qui est impossible.

Bibliographie

[1] **S.N.Chow, B.Deng, B.Fiedler** Homoclinic bifurcation at resonant eigenvalues, *Preprint (1988), Konrad-Zuse-Zentrum fur Informations technik.*
[2] **B.Deng** Shilnikov prpoblem, exponential expansion, strong λ-lemma, C^1-linearization and homoclinic bifurcation, Preprint 1987.
[3] **J.Guckenheimer, P.Holmes** Structurally stable heteroclinic cycles, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1988), 103*
[4] **I.Melbourne** Intermittency as a codimension 3 phenomenon, *Dyn. Diff. Eqns, 1 (4) (1989), 347-367.*
[5] **I.Melbourne, P.Chossat, M.Golubitsky** Heteroclinic cycles involving periodic solutions in mode inetractions with O(2) symmetry, *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, 113A (1989), 357-387.*
[6] **A.Scheel** Bifurcation d'orbites périodiques à partir de cycles homoclines en présence de symétrie, (1991) Publications de l'INLN, Université de Nice.