

关于带W权Drazin逆的表示定理及迭代方法*

卜凡斌

复旦大学数学系, 上海 200433

摘 要

为了研究奇异线性系统, Cline和Greville[8]提出了长方阵带W权Drazin逆的概念并讨论了其性质. 对带W权Drazin逆的计算引起了广泛的兴趣, 主要分为两种方法, 直接法[2, 4, 6]和迭代法[3, 5, 7, 9, 12, 13]. 本文研究了带W权Drazin逆的迭代法和逐次矩阵乘幂法, 推广了文献[12, 13]的主要结果.

关键字: 带W权Drazin逆, 表示定理, 指标, 迭代方法

中图法分类号: O151.21, O241.9

AMS Subject Classification: 15A09, 65F20

The Representation for W-weighted Drazin Inverse and Its Iterative Method

Fanbin Bu

Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433

Abstract

To study singular linear system, Cline and Greville[8] proposed the concept of W-weighted Drazin inverse for the rectangular matrices, where the properties were also discussed. The computation for the W-weighted Drazin inverse is of much interest, which is mainly divided into two kinds of methods: direct method[2, 4, 6] and iterative method[3, 5, 7, 9, 12, 13]. In this paper, we study the iterative method and successive matrix squaring(SMS) method for the W-weighted Drazin inverse and generalize the main results in [12, 13].

Keywords: W-weighted Drazin inverse, representation theorem, index, iterative method.

*国家自然科学基金资助项目(19901006)

1 简介

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, W \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 称满足下面三个矩阵方程的 $m \times n$ 阶方阵 X 为 A 的带 W 权 Drazin 逆:

$$(AW)^{k+1}XW = (AW)^k, \text{ 对某个正整数 } k$$

$$XWAWX = X,$$

$$AWX = XWA$$

记 $X = A_{d,w}$, 对带 W 权 Drazin 逆, 可定义 AW 和 WA 的指标. 当 A 为 n 阶方阵且 $W = I_n$ 时, 带 W 权 Drazin 逆退化为普通的 Drazin 逆, 即 $X = A^D$.

对于方阵 WA , 使得 $\text{rank}[(WA)^q] = \text{rank}[(WA)^{q+1}]$ 成立的最小的非负整数 q , 称之为 WA 的指标, 记为 $q = \text{Index}(WA)$.

2 带 W 权 Drazin 逆的表示定理

引理 1. [11] 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, W \in \mathbb{C}^{n \times m}, \text{Index}(WA) = q \leq l$, 则:

$$A_{d,w} = \tilde{A}^{-1}(AW)^q A$$

这里 $\tilde{A} = (AW)^{l+2} |_{\mathcal{R}[A(WA)^q]}$ 为限制在 $\mathcal{R}[A(WA)^q]$ 上的 $(AW)^{l+2}$

证明. 由

$$A_{d,w} = (WAW)^{(2)}_{\mathcal{R}[(AW)^q A], \mathcal{N}[(AW)^q A]}$$

及 [11] 中的 *Thm. 2.3* 即得.

定理 2.1. 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, W \in \mathbb{C}^{n \times m}, \text{Index}(WA) = q \leq l$, 记 $\tilde{A} = (AW)^{l+2} |_{\mathcal{R}[A(WA)^q]}$. 假定 AW 的谱为实的. 若 Ω 为一开集, 使得 $\sigma(\tilde{A}) \subset \Omega \subset (0, +\infty)$, 且 $\{S_n(x)\}$ 为 Ω 上的一簇连续实值函数, 在 $\sigma(\tilde{A})$ 上一致地有 $S_n(x) = \frac{1}{x}$, 则:

$$A_{d,w} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\tilde{A}) A(WA)^l$$

而且

$$\frac{\|S_n(\tilde{A}) A(WA)^l - A_{d,w}\|_P}{\|A_{d,w}\|_P} \leq \max_{x \in \sigma(\tilde{A})} |S_n(x)x - 1| + \mathcal{O}(\epsilon), \epsilon > 0$$

这里 P 为一非异阵, 使得 $P^{-1}AWP$ 为 AW 的 *Jordan* 标准型, 且 $\|AW\|_P = \|P^{-1}AW\|_2$

证明. 既然 AW 的谱为实的, 我们总能选择 $l (l \geq q)$ 使得 $(AW)^{l+2}$ 的谱为非负的. 且 $\tilde{A} = (AW)^{l+2} |_{\mathcal{R}[A(WA)^q]}$ 的谱为正的. 由 [10] 中的定理 10.27, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\tilde{A}) = \tilde{A}^{-1}, \text{ 一致地于 } \mathbb{C} \text{ 上.}$$

则由引理 (1) 知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\tilde{A}) A(WA)^l = \tilde{A}^{-1} A(WA)^l = A_{d,w}$$

为了获得误差界,注意到 $A(WA)^l = \tilde{A}A_{d,w}$,因此

$$S_n(\tilde{A})A(WA)^l - A_{d,w} = [S_n(\tilde{A})\tilde{A}]A_{d,w}$$

由于 P 是使 $P^{-1}AWP$ 为 AW 的Jordan标准型的非异阵,有一个熟知的事实

$$\|AW\|_P \leq \rho(AW) + \epsilon$$

因此

$$\begin{aligned} \|S_n(\tilde{A})A(WA)^l - A_{d,w}\|_P &\leq \|S_n(\tilde{A})\tilde{A} - I\|_P \|A_{d,w}\|_P \\ &\leq \left[\max_{x \in \sigma(\tilde{A})} |S_n(x)x - 1| + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \|A_{d,w}\|_P \end{aligned}$$

为了在具体的计算步骤里利用这个误差估计,下面定理给出 $\sigma(\tilde{A})$ 的上界与下界将会很有帮助.

定理 2.2. 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, W \in \mathbb{C}^{n \times m}, \text{Index}(WA) = q \leq l, \text{rank}[(AW)^q] = r$,记 $\tilde{A} = (AW)^{l+2} |_{\mathcal{R}[(WA)^q]}$,假定 AW 的谱为实的.则对每个 $\lambda \in \sigma(\tilde{A})$ 有

$$\frac{1}{\|(AW)^D\|^{l+2}} \leq \lambda \leq \|AW\|^{l+2}$$

证明. 设 $\lambda_i, (i = 1 : r)$ 为 AW 的非零特征值,注意到 $\lambda_i^{l+2} > 0$,且

$$0 \neq \lambda_i^{l+2} \in \sigma(\tilde{A}) \subseteq \sigma[(AW)^{l+2}]$$

显然, $\text{Index}[(AW)^{l+2}] = 1$,且

$$1/\lambda_i^{l+2} \in \sigma \left[((AW)^{l+2})^\# \right] = \sigma \left[((AW)^D)^{l+2} \right]$$

因此我们得到

$$1/\lambda_i^{l+2} \leq \|(AW)^D\|^{l+2}$$

即

$$\lambda \geq \frac{1}{\|(AW)^D\|^{l+2}}, \text{对每个 } \lambda \in \sigma(\tilde{A}).$$

另一方面,

$$\|(AW)^{l+2}\| = \|(AW)^{l+2} |_{\mathcal{R}[(WA)^q]}\|,$$

我们知道

$$\|\tilde{A}\| = \|(AW)^{l+2}\| \leq \|AW\|^{l+2}.$$

因此

$$\lambda \leq \|AW\|^{l+2}, \text{对每个 } \lambda \in \sigma(\tilde{A}).$$

3 带W权Drazin逆的迭代方法

在这一部分里,我们将给出定理(2.1)的几个推论.

3.1 Euler-Knopp方法

若 $S_n = \alpha \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1-\alpha)^{m-j} \alpha^j a_j$ 收敛于 a (其中参数 $\alpha > 0$), 则称 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 为 Euler-Knopp 可求和的.

若 $a_n = (1-x)^n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), 则 $S_n(x) = \alpha \sum_{k=0}^n (1-\alpha x)^k$ 为级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 的 Euler-Knopp 变换. 容易看出, 在集合 $E_\alpha = \{x : |1-\alpha x| < 1\} = \{x : 0 < x < 2/\alpha\}$ 的紧子集上一致地有: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{x}$. 由定理(2.2)知:

$$\sigma(\tilde{A}) \subseteq \left[\frac{1}{\|(AW)^D\|^{l+2}}, \|AW\|^{l+2} \right] \subseteq (0, \|AW\|^{l+2}]$$

如果我们选取 α 使得 $0 < \alpha < 2\|AW\|^{-(l+2)}$, 则 $\sigma(\tilde{A}) \subseteq (0, \|AW\|^{l+2}] \subseteq E_\alpha$, 对这样的参数, 由表示定理(2.1)得到

$$A_{d,w} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} (I - \alpha(AW)^{l+2})^n A(WA)^l,$$

若我们取

$$A_n = \alpha \sum_{j=0}^n (I - \alpha(AW)^{l+2})^j A(WA)^l,$$

则得到迭代过程:

$$A_0 = \alpha A(WA)^l, \quad A_{n+1} = [I - \alpha(AW)^{l+2}] A_n + \alpha A(WA)^l \quad (1)$$

因此有如下推论:

推论 1. 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $Index(WA) = q \leq l$, 假定 AW 的谱为实的. 若 $0 < \alpha < \frac{2}{\|AW\|^{l+2}}$, 则由(1)定义的 $\{A_n\}$ 收敛到 $A_{d,w}$.

对于误差界, 我们注意到函数列 $S_n(x)$ 满足 $S_{n+1}(x)x - 1 = (1-\alpha x)[S_n(x)x - 1]$, 因此 $|S_n(x)x - 1| = |1-\alpha x|^{n+1}$.

若 $x \in \sigma(\tilde{A})$, $0 < \alpha < \frac{2}{\|AW\|^{l+2}}$, 我们看到:

$$|1-\alpha x| \leq \beta < 1, \quad \beta = \max\{|1-\alpha\|AW\|^{l+2}|, |1-\alpha\|(AW)^D\|^{-(l+2)}\},$$

则

$$|S_n(x)x - 1| \leq \beta^{n+1} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty)$$

由定理(2.1)得误差界:

$$\frac{\|A_n - A_{d,w}\|_P}{\|A_{d,w}\|_P} \leq \beta^{n+1} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

3.2 Newton-Raphson方法

首先考虑函数 $s(y) = y^{-1} - x$ 的根为 $\frac{1}{x}$,构造序列 $\{y_n\}$:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{s(y_n)}{s'(y_n)} = y_n(2 - xy_n).$$

假定 $\alpha > 0$,定义函数列 $\{S_n(x)\}$:

$$S_0(x) = \alpha, \quad S_{n+1}(x) = S_n(x)[2 - xS_n(x)] \quad (2)$$

容易看出函数列(2)满足:

$$xS_{n+1}(x) - 1 = -[xS_n(x) - 1]^2,$$

对此等式进行迭代,当 $0 < \alpha < \frac{2}{\|AW\|^{l+2}}$ 时,有

$$|xS_n(x) - 1| = |\alpha x - 1|^{2^n} \leq \beta^{2^n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty), \quad \beta \text{ 的取法与上同.}$$

Newton-Raphson方法的重要之处在于它的平方收敛性,把上面的事实与定理(2.1)联系起来,我们看到,序列 $\{S_n(\tilde{A})\}$

$$S_0(\tilde{A}) = \alpha I, \quad S_{n+1}(\tilde{A}) = S_n(\tilde{A}) [2I - \tilde{A}S_n(\tilde{A})]$$

有性质:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\tilde{A}A(WA)^l) = A_{d,w}.$$

若我们令 $A_n = S_n(\tilde{A})A(WA)^l$,则:

$$A_0 = \alpha A(WA)^l, \quad A_{n+1} = A_n(2I - WAWA_n) \quad (3)$$

因此我们有:

推论 2. 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, W \in \mathbb{C}^{n \times m}, \text{Index}(WA) = q \leq l$,假定 AW 的谱为实的.则由(3)定义的序列 $\{A_n\}$ 收敛到 $A_{d,w}$.且误差界由下式给出:

$$\frac{\|A_n - A_{d,w}\|_P}{\|A_{d,w}\|_P} \leq \beta^{2^n} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

3.3 带W权Drazin逆的极限形式

对 $l \geq q$ 来说,

$$A_{d,w} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [tI + (AW)^{l+2}]^{-1} A(WA)^l,$$

令 $S_t(x) = \frac{1}{t+x}$,则有此方法的误差界.注意到当 $x \in \sigma(\tilde{A})$ 时,有

$$|xS_t(x) - 1| = \frac{t}{x+t} \leq \frac{t}{\|(AW)^D\|^{-(l+2)} + t}.$$

因此由定理(2.1),有:

推论 3. 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, W \in \mathbb{C}^{n \times m}, \text{Index}(WA) = q \leq l$,假定 AW 的谱为实的.有下式成立:

$$\frac{\|[tI + (AW)^{l+2}]^{-1} A(WA)^l - A_{d,w}\|_P}{\|A_{d,w}\|_P} \leq \frac{\|(AW)^D\|^{l+2}t}{1 + \|(AW)^D\|^{l+2}t} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

3.4 Newton-Gregory插值方法

设 $P_n(x)$ 是 $f(x) = 1/x$ 在 $x = 1, 2, \dots, n+1$ 上满足 $P_n(x) = 1/x$ 的唯一的 n 次插值多项式,由Newton-Gregory插值公式知:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{x-1}{j} \Delta^j f(1),$$

这里 Δ 表示向前差分算子:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \Delta^j f(x) = \Delta(\Delta^{j-1} f)(x)$$

且

$$\binom{x-1}{j} = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-j)}{j!}.$$

不难验证若 $f(x) = 1/x$,则 $\Delta^j f(1) = \frac{(-1)^j}{j+1}$ 及 $P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \prod_{l=0}^{j-1} (1 - \frac{x}{l+1})$,这里的连乘指标从0到-1取值为1.容易得到:

$$1 - xP_n(x) = \prod_{l=0}^n (1 - \frac{x}{l+1}),$$

这样,我们有:

推论 4. 多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 的紧子集上一致地满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = 1/x$

证明. 见[1].

由定理(2.1)和引理(4),得到

$$A_{d,w} = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\tilde{A})A(WA)^l,$$

为方便计算,我们把这个结果用另外的形式来描述. 记

$$P_0(x) = 1, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{n+2} \prod_{l=0}^n (1 - \frac{x}{l+1}) = P_n(x) + \frac{1}{n+2} (1 - xP_n(x)).$$

因此若令 $A_n = P_n(\tilde{A})A(WA)^l$,我们得到如下计算 $A_{d,w}$ 的迭代方法:

$$A_0 = A(WA)^l, \quad A_{n+1} = P_{n+1}(\tilde{A})A(WA)^l = A_n + \frac{A_0}{n+2} (I - WAWA_n) \quad (4)$$

所以我们可以说:

推论 5. 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, W \in \mathbb{C}^{n \times m}, \text{Index}(WA) = q \leq l$,假定 AW 的谱为实的.则由(4)定义的序列 $\{A_n\}$ 收敛到 $A_{d,w}$.

为了给出此方法的误差界,记 $x \in \sigma(\tilde{A}) \subseteq \left[\frac{1}{\|(AW)^D\|^{l+2}}, \|AW\|^{l+2} \right]$, 当 $l \geq L = \lceil \|AW\|^{l+2} \rceil$ 时,有:

$$1 - \frac{x}{l+1} \leq e^{-\frac{x}{l+1}}, \quad \forall x \in \sigma(\tilde{A}).$$

所以,

$$\prod_{l=L}^n \left(1 - \frac{x}{l+1} \right) \leq e^{-x \sum_{l=L}^n \frac{1}{l+1}}, \quad (n \geq L)$$

同时,

$$\sum_{l=L}^n \frac{1}{l+1} \geq \int_{L+1}^{n+2} \frac{dt}{t} = \ln(n+2) - \ln(L+1).$$

所以有:

$$e^{-x \sum_{l=L}^n \frac{1}{l+1}} \leq (L+1)^x (n+2)^{-x} = \left(1 + \|AW\|^{l+2} \right)^x (n+2)^{-x}.$$

若令常数

$$c = \max_{x \in \sigma(\tilde{A})} \left| \left(1 + \|AW\|^{l+2} \right)^x \prod_{l=0}^{L-1} \left(1 - \frac{x}{l+1} \right) \right|,$$

则:

$$|1 - xP_n(x)| = \left| \prod_{l=0}^{L-1} \left(1 - \frac{x}{l+1} \right) \right| \cdot \left| \prod_{l=L}^n \left(1 - \frac{x}{l+1} \right) \right| \leq c(n+2)^{-x}.$$

由定理(2.1)得:

$$\frac{\|A_n - A_{d,w}\|_P}{\|A_{d,w}\|_P} \leq c(n+2)^{-\|(AW)^D\|^{-(l+2)}} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

3.5 Hermit插值方法

设 $q_n(x)$ 是 $f(x) = 1/x$ 在点 $x = 1, 2, \dots, n+1$ 上的满足 $q_n(x) = 1/x, q'_n(x) = -1/x^2$ 的唯一的 $2n+1$ 次插值多项式.

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^n [2(i+1) - x] \prod_{l=1}^i \left(\frac{l-x}{1+l} \right)^2$$

这里连乘指标从1到0取值1.由归纳法易证:

$$1 - xq_n(x) = \prod_{l=0}^n \left(1 - \frac{x}{l+1} \right)^2.$$

推论 6. 多项式序列 $\{q_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 的紧子集上一致地满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(x) = 1/x$

证明. 见[1].

由定理(2.1)即引理(6)得:

$$A_{d,w} = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(\tilde{A})A(WA)^l.$$

令 $q_0(x) = 2 - x$,和

$$\begin{aligned} q_{n+1}(x) &= q_n(x) + [2(n+2) - x] \prod_{l=1}^{n+1} \left(\frac{l-x}{1+l} \right)^2 \\ &= q_n(x) + [2(n+2) - x] \left(\prod_{l=0}^n \left(\frac{1+l-x}{1+l} \right)^2 \right) / (n+2)^2 \\ &= q_n(x) + \frac{1}{n+2} \left(2 - \frac{x}{n+2} \right) [1 - xq_n(x)] \end{aligned}$$

若设 $A_n = q_n(\tilde{A})A(WA)^l$,我们得到如下计算 $A_{d,w}$ 的迭代方法:

$$M = A(WA)^l, A_0 = (2I - MWA)M, A_{n+1} = A_n + \frac{1}{n+2} (2I - \frac{1}{n+2} MWA)(I - WA)A_n. \quad (5)$$

推论 7. $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, W \in \mathbb{C}^{n \times m}, \text{Index}(WA) = q \leq l$,假定 AW 的谱为实的.则由(5)定义的序列 $\{A_n\}$ 收敛到 $A_{d,w}$.

和Newton-Gregory插值方法类似,我们给出误差界.

$$\prod_{l=L}^n \left(1 - \frac{x}{l+1} \right)^2 \leq \left(1 + \|AW\|^{l+2} \right)^{2x} (n+2)^{-2x}, \quad (L \text{ 与上同})$$

令常数

$$d = \max_{x \in \sigma(\tilde{A})} \left| \left(1 + \|AW\|^{l+2} \right)^{2x} \prod_{l=0}^{L-1} \left(1 - \frac{x}{l+1} \right)^2 \right|,$$

则

$$|1 - xq_n(x)| = \left| \prod_{l=0}^{L-1} \left(1 - \frac{x}{l+1} \right)^2 \right| \cdot \left| \prod_{l=L}^n \left(1 - \frac{x}{l+1} \right)^2 \right| \leq d(n+2)^{-2x}$$

由定理(2.1)得:

$$\frac{\|A_n - A_{d,w}\|_P}{\|A_{d,w}\|_P} \leq d(n+2)^{-2\|(AW)^D\|^{-(l+2)}} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

3.6 SMS(successive matrix squaring)方法

首先证明矩阵 A 的带 W 权Drazin逆是一个简单的矩阵方程 $X = PX + Q$ 的解,根据这个方程,我们构造一个迭代格式来逼近 $A_{d,w}$,这可以由并行计算 $T = \begin{bmatrix} P & Q \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 的 m 次幂 $T^m =$

来实现,其中 T^m 的左上角的块矩阵是逼近 $A_{d,w}$ 的 m 次近似解 X_m . T^m 可由逐次矩阵乘方(SMS)而得到.

$$\begin{cases} T_0 & = T \\ T_{i+1} & = T_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, j \end{cases} \quad (6)$$

记 $q = \text{Index}(WA)$,根据带 W 权Drazin逆的定义,有

$$\begin{aligned} A_{d,w} &= A_{d,w} - \beta [A(WA)^q W A W A_{d,w} - A(WA)^q] \\ &= [I - \beta(AW)^{q+2}] A_{d,w} + \beta A(WA)^q \end{aligned}$$

令

$$P = I - \beta(AW)^{q+2}, \quad Q = \beta A(WA)^q, \quad \beta \text{ 是一个松弛参数}$$

$A_{d,w}$ 是矩阵方程 $X = PX + Q$ 的解,可由下列迭代格式逼近:

$$X_1 = Q, \quad X_{m+1} = PX_m + Q \quad (7)$$

我们可以并行计算(7),这是因为:直接验证 $\sum_{i=0}^{m-1} P^i Q$ 是 $A_{d,w}$ 的 m 次逼近,这由(7)可得,即 $X_m = \sum_{i=0}^{m-1} P^i Q$.我们知 X_m 的计算可归结为 T^m 的计算,而 T^m 可由(6)给出的SMS方法计算.注意到(6)的 m 步等价于(7)的 2^m 步,首先,我们有:

定理 3.1. 设 T_0, T_m 由(6)给出,则

$$T_m = T_0^{2^m} = \begin{bmatrix} P^{2^m} & \sum_{i=0}^{2^m-1} P^i Q \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

下面定理给出在矩阵 U -范数意义下,SMS算法收敛于 $A_{d,w}$ 的充分条件.矩阵 U 是使 $U^{-1}WAU$ 为Jordan标准型的变换阵(U 非奇异),且令 $\|B\|_U = \|BU\|_2$.

定理 3.2. 设逼近序列 $X_{2^m} = \sum_{i=0}^{2^m-1} [I - \beta(AW)^{q+2}]^i \beta A(WA)^q$,由SMS算法(6)得到,它收敛于 $A_{d,w}$ 的充分条件是:选取正参数 β ,使得 $\max_{1 \leq i \leq r} |1 - \beta \lambda_i^{q+2}| < 1$,其中 λ_i 是 WA 的非零特征值($i = 1, 2, \dots, r$).在收敛的情形下,可得误差估计:

$$\frac{\|A_{2^m} - A_{d,w}\|_U}{\|A_{d,w}\|_U} \leq \left(\max_i |1 - \beta \lambda_i^{q+2}| + \epsilon \right)^{2^m}.$$

我们导出的逼近 $A_{d,w}$ 的误差界是新的.

已有的迭代算法[5, 7],计算 $A_{d,w}$ 的格式是:

$$X_{m+1} = X_m(2I - W A W X_m) \quad (8)$$

其中

$$X_0 = \beta A(WA)^q, \quad q = \text{Index}(WA), \quad \beta \text{满足} \max_{1 \leq i \leq r} |1 - \beta \lambda_i^{q+2}| < 1,$$

我们可将迭代格式(8)与SMS算法相比较,改写(8)为

$$X_{m+1} = (2I - X_m W A W) X_m,$$

等价于

$$\begin{aligned} X_0 &= \beta A(WA)^q, \quad P_0 = I - \beta(AW)^{q+2} \\ X_{m+1} &= (I + P_m)X_m, \quad P_{m+1} = P_m^2. \end{aligned}$$

可由数学归纳法证明

$$X_m = \sum_{i=0}^{2^m-1} [I - \beta(AW)^{q+2}]^i \beta A(WA)^q$$

这就说明了SMS算法与已有的算法[5, 7]等价.

我们还可将SMS算法推广到高阶 $l(l \geq 2)$.考虑:

$$T_0 = \begin{bmatrix} P & Q \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad T_{m+1} = T_m^l \quad (9)$$

利用数学归纳法可证:

$$T_m = T_0^{l^m} = \begin{bmatrix} P^{l^m} & \sum_{i=0}^{l^m-1} P^i Q \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

迭代格式(9),我们记为SMS(l),它等价于[5, 7]中的 l 次迭代方法,具有如下的格式:

$$\tilde{X}_m = (I + P_m + P_m^2 + \cdots + P_m^{l-2})X_m, \quad l \geq 2, \quad X_{m+1} = X_m + P_m \tilde{X}_m$$

其中

$$P_m = I - W A W X_m, \quad X_0 = \beta A(WA)^q,$$

我们可得到类似的误差估计:

$$\frac{\|A^{l^m} - A_{d,w}\|_U}{\|A_{d,w}\|_U} \leq \left(\max_i |1 - \beta \lambda_i^{q+2}| + \epsilon \right)^{l^m}.$$

从迭代 $T_m = T_0^{l^m}$ 可知,我们对矩阵 T_0 进行 l^m 次乘幂,注意到(9)的格式,可自由选取 l 和 m ,我们观察一下计算 $T_0^{l^m}$ 的代价可知:若 l 不是2的幂次方将无优越性可言.如 $l = 3$,我们需要计算2次矩阵乘法才能从 T_0 求得 T_0^3 .同样可用SMS算法相同的矩阵乘法求得 T_0^4 .对 $l = 4, 8$ 的讨论同 $l = 2$.因此我们为了计算 $T_0^{l^m}$,可用 d 次SMS算法, $2^d \geq l^m$.因此从(9)可得到:若 l 不是2的幂次将没有优势,在此意义下,我们得到SMS(2)=SMS是最优的.

4 数值例子

我们考虑

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{4 \times 3}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{3 \times 4},$$

易知

$$AW = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{4 \times 4}, \sigma(AW) = \{0, 0, 1, 1\} \text{ 均为实数}$$

并且知道 $\text{Index}(WA) = 1, \text{Index}(AW) = 2$, 取 $l = q = 2$.

Euler-Knopp方法:(我们当计算得到的值与真实值之差的2-范数小于 10^{-14} 时中止)

$\alpha \ AW\ ^{l+2}$ 的值	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
迭代次数	125	89	67	53	42	34	27	22	16	10

$\alpha \ AW\ ^{l+2}$ 的值	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
迭代次数	14	19	25	31	39	49	63	82	113	169

且可知当 $\alpha \|AW\|^{l+2} = 1.22$ 时, 迭代次数达到最小为6.

Newton-Raphson方法:

$\alpha \ AW\ ^{l+2}$ 的值	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
迭代次数	8	8	8	7	7	7	6	6	5	5

$\alpha \ AW\ ^{l+2}$ 的值	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
迭代次数	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9

且可知当 $\alpha \|AW\|^{l+2} = 1.22$ 时, 迭代次数达到最小为4.

由于 $A_{d,w}$ 的极限形式中含有求矩阵的逆, 这在实际的计算中是非常不希望的, 这里我们仍给出此例计算结果.

当 $t = 10^{-11}$ 时,

$$A_{d,w} = \begin{bmatrix} 0.99999999999000 & -0.09999999999500 & 0 \\ 0 & 0.99999999999000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $t = 10^{-12}$ 时,

$$A_{d,w} = \begin{bmatrix} 0.9999999999900 & -0.0999999999950 & 0 \\ 0 & 0.9999999999900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $t = 10^{-13}$ 时,

$$A_{d,w} = \begin{bmatrix} 0.999999999999990 & -0.099999999999995 & 0 \\ 0 & 0.999999999999999 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $t = 10^{-14}$ 时,

$$A_{d,w} = \begin{bmatrix} 0.999999999999999 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.999999999999999 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $t = 10^{-15}$ 时,

$$A_{d,w} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Newton-Gregory方法:因为此方法为线性收敛的,下面给出当计算结果与真实值之差的2-范数 ε 取不同值时,迭代次数的差别.

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
迭代次数	5	41	401	4001	40000

通过计算可知,迭代次数与权矩阵 W 的选取有很大关系,从Hermit方法亦可知.只需1次迭代即可得到精确解,而当 W 变化后,迭代次数也会相应的变化.

当权矩阵 W 取相同时,SMS算法需要的迭代次数最少,为2.

从上面的计算可以看出, $0 < \alpha < \frac{2}{\|AW\|^{l+2}}$ 只是结论成立的充分条件.

注记 1. 我们去掉了[9]中关于算子 (WD) 条件: $A \in B(X_1, X_2), W \in B(X_2, X_1), Index(AW) = k < +\infty, \mathcal{R}[(AW)^k]$ 闭, $\mathcal{N}[(AW)^k] \subseteq \mathcal{N}[(AW)^{k*}], \mathcal{R}[(AW)^k] \subseteq \mathcal{R}[(AW)^{k*}$,但是要求 AW 或 WA 的谱是实的.关于 AW 的谱是任意的情形,将另行给出.

注记 2. 我们的迭代法不难推广到Banach空间.

参考文献

- [1] 王国荣,矩阵与算子广义逆,科学出版社,(1994).
- [2] 乔三正,Banach空间中线性算子的带权Drazin逆和Drazin逆的逼近,高校计算数学学报,3(1981),1-8.
- [3] 王国荣,Banach空间中线性算子带 W 权Drazin逆的逼近方法,高校计算数学学报,10(1998),76-81.
- [4] 陈旭洲,陈果良,关于长方矩阵加权Drazin逆的一种分裂法,高校应用数学学报,8(1993),71-77.

- [5] 王国荣,魏益民,关于计算广义逆 A_{MN}^\dagger 和 $A_{d,w}$ 的迭代法,校计算数学学报,16(1994),366-372.
- [6] 王国荣,林玉华,计算带W权Drazin逆的嵌入法,上海师大学报,23(1994)增刊,24-29.
- [7] 王国荣,魏益民,Banach空间线性算子带W权Drazin逆的迭代法,上海师大学报,28(1999),1-7.
- [8] R.E.Cline and T.N.E. Greville, A Drazin inverse for rectangular matrix, Linear Algebra Appl., 29(1980),53-62.
- [9] Wang Guorong,Iterative methods for computing the Drazin inverse and the W-weighted Drazin inverse of linear operators based on functional interpolation, 高校计算数学学报,11(1989),269-280.
- [10] R.Walter, Functional Analysis, McGraw-Hill, New York,1973.
- [11] Wei Yimin, A characterization and representation of the generalized inverse $A_{T,S}^{(2)}$ and its applications, Linear Algebra Appl., 280(1998),87-96.
- [12] Wei Yimin, Successive matrix squaring algorithm for computing the Drazin inverse, Appl. Math. Comput., 108(2000)67-75.
- [13] Wei Yimin and Wu Hebing, The representation and approximation for Drazin inverse, J.Comput.Appl.Math., 126(2000),417-432.