

UNIVERSITE DE NICE

DEA

Turbulence et Systèmes Dynamiques

Bifurcation d'orbites périodiques
à partir de cycles homoclines
en présence de symétrie

Rapport de Stage de
Arnd SCHEEL

Directeur
Pascal CHOSSAT

TABLE DES MATIERES

Introduction

Chapitre 1 Existence

- 1.1 La définition d'un cycle homocline
- 1.2 Stabilité structurelle
- 1.3 Un exemple - les cycles homoclines dans \mathbb{R}^3
 - 1.3.0 *Le problème*
 - 1.3.1 *Les sous-groupes irréductibles*
 - 1.3.2 *Les sous-groupes réductibles*

Chapitre 2 Brisure de symétrie forcée

- 2.1 Les résultats de Lin
- 2.2 Application aux cycles homoclines
- 2.3 Deux exemples
 - 2.3.1 *Perturbation du cycle T_h*
 - 2.3.2 *Perturbation du cycle D_{2d}*

Chapitre 3 Brisure de symétrie spontanée - la bifurcation résonante des cycles homoclines

- 3.1 Les hypothèses
 - 3.1.1 *Le cadre*
 - 3.1.2 *La condition de résonance*
 - 3.1.3 *L'hypothèse de généricité*
- 3.2 L'idée
- 3.3 Le résultat
- 3.4 La démonstration
 - 3.4.1 *Les variables de Shilnikov - résultats de Deng*
 - 3.4.2 *Les équations de bifurcation*
 - 3.4.3 *Les différents types de symétrie*
 - 3.4.4 *L'orbite de groupe des solutions bifurquées*
 - 3.4.5 *L'unicité*
- 3.5 *Deux exemples*

Appendice

Bibliographie

Introduction

Dans ce mémoire, on va étudier quelques aspects des cycles homoclines en présence de symétrie.

Une orbite d'un système dynamique, qui tend dans le futur et dans le passé vers le même équilibre, est appelée une orbite homocline. Dans la classe des équations différentielles, ce phénomène est structurellement instable. Depuis longtemps, les bifurcations à partir d'une telle orbite ont été étudiées. En se restreignant à une sous-classe d'équations différentielles (ce qui pourrait être par exemple une courbe dans l'espace des paramètres d'un système à deux paramètres (voir [Chow,Deng,Fiedler] et les références) ou une condition de réversibilité) on peut observer une persistance.

Si un système dynamique est équivariant par un groupe de symétrie, un autre phénomène, fortement lié aux orbites homoclines, peut apparaître. Une orbite, qui tend dans le passé vers un équilibre, dans le futur vers un élément conjugué par symétrie, crée un *cycle homocline*. Celui-ci peut être structurellement stable dans la classe des équations différentielles équivariantes.

Dans le premier chapitre, on va préciser les notations et chercher des cycles homoclines pour des champs de vecteurs équivariants par un groupe de symétrie discret dans \mathbb{R}^3 . Les seuls cycles structurellement stables sont ceux, déjà trouvés dans [Guckenheimer,Holmes] et, dans un contexte différent, dans [Armbruster, Guckenheimer,Holmes].

Dans la deuxième partie, on va étudier la bifurcation globale à partir d'un cycle homocline. Le deuxième chapitre montre comment des perturbations, qui brisent la symétrie structurelle, donnent lieu à la création d'orbites périodiques au voisinage du cycle. Dans le troisième chapitre, inspiré par les travaux de [Melbourne] et [Chow,Deng,Fiedler], on trouve des résultats semblables mais sans briser la symétrie. Près d'une résonance 1:1 dans les valeurs propres dominantes des équilibres, le comportement asymptotique au voisinage du cycle change. Numériquement, on observe que parfois, la perte de stabilité du cycle crée une orbite périodique stable au voisinage. On va essayer de déterminer l'existence de cette orbite bifurquée, dépendant de la symétrie qu'elle possède.

Chapitre 1: Existence

1.1 La définition d'un cycle homocline

Etant donné un champ de vecteurs :

$$(1) \quad \dot{X} = F(X), \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

équivariant par un groupe discret $\Gamma \subset O(n)$, on dit que F possède un cycle homocline, si

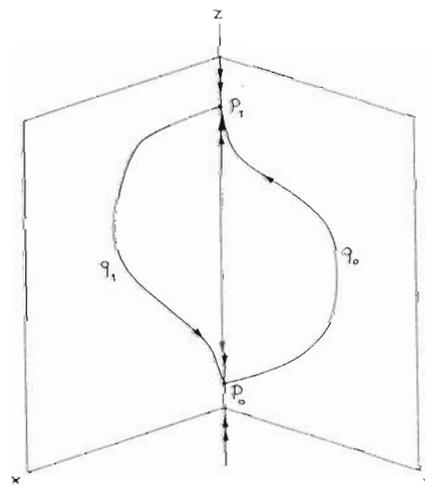
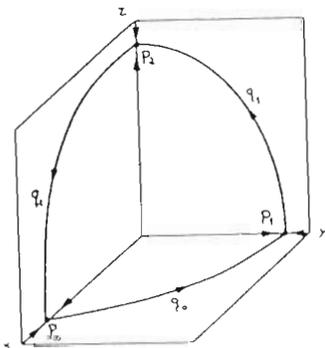
$$(i) \quad \exists p_0, p_1 \in \mathbb{R}^n \text{ et } \sigma \in \Gamma, \text{ tq } F(p_0) = 0 \text{ et } \sigma p_0 = p_1$$

$$(ii) \quad \exists q_0 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & q_0(t) \end{cases}, \text{ solution de (1) tq}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q_0(t) = p_1 \text{ et } \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} q_0(t) = p_0.$$

On appelle $Q = \{\gamma q_0(t) | \gamma \in \Gamma, t \in \mathbb{R}\}$ le cycle homocline. Comme Γ est un groupe discret, alors pour tous les $\sigma \in \Gamma$ avec $\sigma p_0 = p_1$, $Q_\sigma = \{\sigma^i q_0(t) | t \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}\}$ forme un cycle dynamique.

Deux exemples de cycles sont montrés dans (Fig.1). Une description détaillée de ces deux cycles va être donnée dans le chapitre (1.3). L'article de [Melbourne, Chossat, Golubitsky] propose une définition légèrement plus générale. Ils demandent de p_0 et p_1 , que leurs sous-groupes d'isotropie soient conjugués.



1.2 Stabilité structurelle

Soit $X = C_r^\infty$ l'espace des champs de vecteurs C^∞ , équivariant par Γ .

Supposons que $F \in X$ possède un cycle homocline Q .

On dit que Q est structurellement stable (str.st.), ssi

$\forall W$ voisinage de Q , $\exists V \subset X$ voisinage de F

tq tous les $F' \in V$ possèdent un cycle homocline $Q' \subset W$.

La définition suivante décrit une classe de cycles homoclines str.st. :

Définition 1.1

On appelle Q un cycle str.st. dans un plan de symétrie, ssi

$$T_{q_0(t)}W^u(p_0) + T_{q_0(t)}W^s(p_1) = T_{q_0(t)}\Sigma,$$

où $\Sigma = \text{Fix}(G_{q_0})$ dénote le sous-espace fixe sous l'action du sous-groupe d'isotropie de $q_0(t)$, indépendant de t .

Lemme 1.2

Un tel cycle est str.st.

Démonstration

L'intersection transverse $W^u(p_0) \cap W^s(p_1)$ persiste de sous de petites perturbations, qui laissent Σ invariant.

1.3. Un exemple: les cycles homoclines dans \mathbb{R}^3

1.3.0 Le problème

On va chercher des cycles homoclines, qui apparaissent dans le cas d'une bifurcation générique avec symétrie, ou, autrement dit, une connexion hétérocline entre deux équilibres, bifurqués de l'origine, conjugués par symétrie.

Pour les sous-groupes irréductibles de $\mathcal{O}(3)$, on donne

- (i) les générateurs et leurs représentations,
- (ii) les équations de bifurcation à l'ordre déterminant,
- (iii) les sous-groupes d'isotropie, les zéros bifurqués et leurs linéarisations et
- (iv) des conditions d'existence d'un cycle homocline.

Pour les sous-groupes réductibles, on regarde le problème de codimension 2, où la linéarisation autour de l'origine possède des valeurs propres voisines de 0 dans les deux sous-espaces invariants. On donne

- (i) les générateurs et leurs représentations,
- (ii) les sous-groupes d'isotropie et
- (iii) on discute l'existence d'un cycle homocline.

Théorème 1.3

Les seuls cycles homoclines str.st. dans des plans de symétrie dans le sens de la définition 1.1, qui peuvent apparaître dans ce problème, possèdent une symétrie T_h ou D_{2d} . D'autres cycles homoclines ne pourraient apparaître que dans le problème avec une symétrie D_{nd}, D_n, C_2, C_{2h} et S_2 .

La démonstration de ce théorème va être le but de ce paragraphe.

Un théorème de Field va être utile, pour décrire le flot au voisinage de l'origine:

Théorème 1.4[Field]

Pour

$$\dot{X} = \lambda X + Q(X), \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad X \in \mathbf{R}^k,$$

Q homogène de degré trois, et $(Q(X), X) < 0, \forall X \neq 0$,

il existe une unique sphère $S(\lambda) \subset \mathbf{R}^k - \{0\}$, invariante par le flot avec

- (i) $S(\lambda)$ est une C^0 -variété dans \mathbf{R}^k ,
- (ii) $S(\lambda)$ est globalement attractif, toutes les orbites $X(t) \neq 0$ s'approchent de $S(\lambda)$,
- (iii) le flot sur $S(\lambda)$ est C^0 -équivalent au flot de phase de $Q(X)$,
- (iv) si $Q(X) = \beta X|X|^2$, il existe $\beta_0 < 0$ tq $\forall \beta < \beta_0$, $S(\lambda)$ est normalement hyperbolique et persiste sous des perturbations.

Dans les paragraphes suivants, on dénote $X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $\iota = id(\mathbf{R}^3)$ et \mathbf{Z}_c^2 le groupe engendré par $-\iota$.

Comme on se servira extensivement des résultats de [Jaric, Michel, Sharp] sur les invariants et les équivariants de l'action des sous-groupes de $\mathcal{O}(3)$ dans \mathbf{R}^3 , on a employé les mêmes notations.

1.3.1 Les sous-groupes irréductibles: T, T_d, T_h, O et O_h

A) Y et Y_h , groupes de symétrie de l'Icosaèdre

Générateurs de $Y \subset \mathcal{SO}(3)$:

- σ , rotation autour de l'axe $\lambda(\tau, 1, 0)$ d'ordre 5
- ρ , rotation autour de l'axe $\lambda(1, 1, 1)$ d'ordre 3
- τ , rotation autour de l'axe $\lambda(1, 0, 0)$ d'ordre 2

où $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\tau^2 = \tau + 1$.

Générateurs de $Y_h = Y \oplus \mathbf{Z}_c^2$:

$$\sigma, \rho, \tau, -\iota$$

Les équations de bifurcation équivariantes par Y et Y_h sont à l'ordre 5 les mêmes pour Y et Y_h :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + ax(x^2 + y^2 + z^2) + bx(\tau^4 z^2 + y^2 - 2\tau^2 x^2)(\tau^2 y^2 - z^2) \\ \dot{y} &= \lambda y + ay(y^2 + z^2 + x^2) + by(\tau^4 x^2 + z^2 - 2\tau^2 y^2)(\tau^2 z^2 - x^2) \\ \dot{z} &= \lambda z + az(z^2 + x^2 + y^2) + bz(\tau^4 y^2 + x^2 - 2\tau^2 z^2)(\tau^2 x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Le calcul de la linéarisation autour des équilibres avec une isotropie D_2 , D_3 , ou D_5 , fait dans l'appendice, donne le résultat suivant:

Si $a < 0$, tous les équilibres bifurqués existent, sont stables dans la direction de l'axe de symétrie et dans les directions transverses

les équilibres de type D_2 sont de type col,
 les valeurs propres des équilibres de type D_3 sont négatives (ou positives) et
 les valeurs propres des équilibres de type D_5 sont positives (resp. négatives).

Si $a > 0$, tous les branches sont sous-critiques et instables.

Lemme 1.5.

Il n'y a pas de cycle homocline avec symétrie Y ou Y_h .

Démonstration

Il existe une sphère invariante, bifurquée de l'origine.

Si, dans

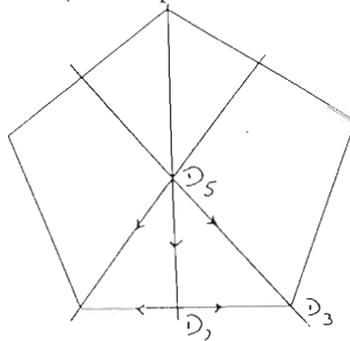
$$\dot{X} = \lambda X - |a|X|X|^2 + P_5(X), \quad P_5 \text{ homogène de degré 5,}$$

on pose $X = \epsilon\xi, \tau = \epsilon^5 t, \mu = \lambda/\epsilon^5$, on obtient

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \mu\xi - \frac{a}{\epsilon^2}\xi|\xi|^2 + P_5(\xi),$$

alors, dans la notation du théorème 1.4, un coefficient $\beta = \frac{a}{\epsilon^2}$ arbitrairement grand. La sphère est alors normalement hyperbolique et persiste sous perturbations d'ordre supérieur ou égal à six.

Dans l'appendice, on démontre aussi, que des équilibres avec une isotropie sous-maximale dans les plans de symétrie ne sont pas possibles. Pour le flot de phase des équations ainsi que pour les équations complètes, qui possèdent la symétrie Y_h , il existe des courbes entre les équilibres d'isotropie D_2, D_3, D_5 , dans les plans de symétrie, sur la sphère invariante. Comme elles sont du type noeud-col, elles persistent sous les perturbations et alors aussi dans le cas de symétrie Y , et empêchent l'existence d'un cycle quelconque (Fig.2).



B) T, T_h, T_d, O, O_h groupes de symétrie du Tétraèdre et de l'Octaèdre

Générateurs de $T \subset SO(3)$:

ρ , rotation autour de l'axe $\lambda(1, 1, 1)$ d'ordre 3 et
 τ , rotation autour de l'axe $\lambda(1, 0, 0)$ d'ordre 2

Générateurs de $T_h = T \oplus \mathbf{Z}_c^2$:

$\rho, \tau, -\iota$ ou
 ρ, τ_x , réflexion au plan $x = 0$

Générateurs de $T_d = T \cup -\iota(O \setminus T)$:

ρ, τ, σ réflexion au plan $x = y$

Générateurs de $O \subset SO(3)$:

ρ ,
 α , rotation autour de l'axe $\lambda(1, 0, 0)$ d'ordre 4 et
 β , rotation autour de l'axe $\lambda(1, 1, 0)$ d'ordre 2.

Générateurs de $O_h = O \oplus \mathbf{Z}_c^2$:

$\rho, \alpha, \beta, -\iota$ ou bien
 ρ, τ_x, σ

Les équations de bifurcation équivariantes

Symétrie T :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + dyz + x(ax^2 + by^2 + cz^2) \\ \dot{y} &= \lambda y + dxz + y(ay^2 + bz^2 + cx^2) \\ \dot{z} &= \lambda z + dyx + z(az^2 + bx^2 + cy^2)\end{aligned}$$

Symétrie T_h :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + x(ax^2 + by^2 + cz^2) \\ \dot{y} &= \lambda y + y(ay^2 + bz^2 + cx^2) \\ \dot{z} &= \lambda z + z(az^2 + bx^2 + cy^2)\end{aligned}$$

Symétrie T_d :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + dyz + x(ax^2 + by^2 + bz^2) \\ \dot{y} &= \lambda y + dxz + y(ay^2 + bz^2 + bx^2) \\ \dot{z} &= \lambda z + dyx + z(az^2 + bx^2 + by^2)\end{aligned}$$

Symétrie O, O_h :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + x(ax^2 + by^2 + bz^2) \\ \dot{y} &= \lambda y + y(ay^2 + bz^2 + bx^2) \\ \dot{z} &= \lambda z + z(az^2 + bx^2 + by^2)\end{aligned}$$

Branches bifurquées

Pour tous les sous-groupes d'isotropie, on va donner les conditions de symétrie, les équations des branches bifurquées et, si nécessaire, des conditions de non-égenérescence.

Symétrie T

Isotropie	Axe	Symétrie	Equation
\mathbf{Z}_3	[1, 1, 1]	$x = y = z$	$\lambda x + dx^2 + O(x ^3) = 0$
\mathbf{Z}_2	[1, 0, 0]	$y = z = 0$	$\lambda + ax^2 + O(x ^3) = 0$
$id([\mathbf{Z}_3])$	[1, 1, -1]	$x = y = -z$	$\lambda x - dx^2 + O(x ^3) = 0$
Isotropie		Equil.bif.	Condition
\mathbf{Z}_3		$x = -\lambda/d + O(\lambda^2)$	$d \neq 0$
\mathbf{Z}_2		$x = \pm\sqrt{-\lambda/a} + O(\lambda ^{3/2})$	$\lambda a < 0$
$id([\mathbf{Z}_3])$		$x = \lambda/d + O(\lambda^2)$	$d \neq 0$

Symétrie T_h

Isotropie	Axe	Symétrie	Equation
\mathbf{Z}_3	[1, 1, 1]	$x = y = z$	$\lambda + (a + b + c)x^2 + O(x ^3) = 0$
D_2	[1, 0, 0]	$y = z = 0$	$\lambda + ax^2 + O(x ^3) = 0$
\mathbf{Z}_2	---	$z = 0$	$\lambda + ax^2 + by^2 + O((x + y)^3) = 0$ $\lambda + ay^2 + cx^2 + O((x + y)^3) = 0$
id	---	---	---
Isotropie		Equil.bif.	Condition
\mathbf{Z}_3		$x = \pm\sqrt{\frac{-\lambda}{a+b+c}} + O(\lambda ^{3/2})$	$\lambda(a + b + c) < 0$
D_2		$x = \pm\sqrt{-\lambda/a} + O(\lambda ^{3/2})$	$\lambda a < 0$
\mathbf{Z}_2		$y^2 = \frac{c-a}{a^2-cb}\lambda + O(\lambda ^{3/2})$ $x^2 = \frac{b-a}{a^2-cb}\lambda + O(\lambda ^{3/2})$	$a^2 - cb \neq 0$ $(c - a)(b - a) > 0, \frac{b-a}{a^2-cb} > 0$
id		---	---

Symétrie T_d

Isotropie	Axe	Symétrie	Equation
\mathbf{Z}_3	[1, 1, 1]	$x = y = z$	$\lambda x + dx^2 + O(x ^3) = 0$
\mathbf{Z}_2	[1, 0, 0]	$y = z = 0$	$\lambda + ax^2 + O(x ^3) = 0$
$\mathbf{Z}_2^s([\mathbf{Z}_3])$	[[1, 1, -1]	$x = y$	$\lambda + dz + O(x^2 + z^2) = 0$ $\lambda z + dx^2 + zO(x^2 + z^2) = 0$
id	---	---	---
Isotropie		Equil.bif.	Condition
\mathbf{Z}_3		$x = -\lambda/d + O(\lambda^2)$	$d \neq 0$
\mathbf{Z}_2		$x = \pm\sqrt{-\lambda/a} + O(\lambda ^{3/2})$	$\lambda a < 0$
$\mathbf{Z}_2^s([\mathbf{Z}_3])$		$x = y = -z = -\lambda/d + O(\lambda^2)$	$d \neq 0$
id		---	---

Symétrie O (resp. O_h)

Isotropie	Axe	Symétrie	Equation
\mathbf{Z}_3	$[1, 1, 1]$	$x = y = z$	$\lambda + (a + 2b)x^2 + O(x ^3) = 0$
$\mathbf{Z}_4(D_4)$	$[1, 0, 0]$	$y = z = 0$	$\lambda + ax^2 + O(x ^3) = 0$
$\mathbf{Z}_2^r(D_2)$	$([1, 1, 0])$	$x = y, z = 0$	$\lambda + (a + b)x^2 + O(x^3) = 0$
id	---	---	---

Isotropie	Equil.bif.	Condition
\mathbf{Z}_3	$x = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{a+2b}} + O(\lambda ^{3/2})$	$\lambda(a + 2b) < 0$
$\mathbf{Z}_4(D_4)$	$x = \pm \sqrt{-\lambda/a} + O(\lambda ^{3/2})$	$\lambda a < 0$
$\mathbf{Z}_2^r(D_2)$	$x = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{a+b}} + O(\lambda ^{3/2})$	$\lambda(a + b) < 0$
id	---	---

On a utilisé les notations \mathbf{Z}_2^r et \mathbf{Z}_2^s pour les groupes d'ordre 2, engendrés respectivement par une rotation et une réflexion. Le symbole $([\mathbf{Z}_3])$ indique que les équilibres se trouvent sur des axes de symétrie d'un groupe plus grand. Pour plus de détails sur 'submaximal branching' et 'vanishing axes', voir [Field].

Les branches bifurquées avec une isotropie triviale sont obtenues pour les symétries T et T_d par la procédure suivante, décrite dans [Sattinger]:

On pose $(x, y, z) = \lambda(u, v, w)$ et obtient

$$\begin{aligned} 0 &= u + dvw + O(|\lambda|) \\ 0 &= v + duw + O(|\lambda|) \\ 0 &= w + dvu + O(|\lambda|), \end{aligned}$$

d'où on déduit pour $\lambda \rightarrow 0$

$$u = \pm v = \pm w = \pm 1/d + O(|\lambda|).$$

Pour les groupes T_h, O et O_h , des branches avec une isotropie triviale sont exclues, car le système (linéaire dans (x^2, y^2, z^2))

$$\begin{aligned} \lambda + ax^2 + by^2 + cz^2 &= 0 \\ \lambda + ay^2 + bz^2 + cx^2 &= 0 \\ \lambda + az^2 + bx^2 + cy^2 &= 0 \end{aligned}$$

possède une solution, ssi $(1, 1, 1) \in \text{Im} A$, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Mais on sait que $(1, 1, 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $a + b + c$, donc si $\det(A) \neq 0$, condition générique, la solution unique du système linéaire est l'équilibre avec isotropie D_3 .

Linéarisation autour des équilibres

Symétrie T

$$L = DF(X) = \begin{pmatrix} \lambda + 3ax^2 + by^2 + cz^2 & 2bxy + dz & 2czx + dy \\ 2cyx + dz & \lambda + 3ay^2 + bz^2 + cx^2 & 2bzy + dx \\ 2bxz + dy & 2cyz + dx & \lambda + 3az^2 + bx^2 + cy^2 \end{pmatrix}$$

(i) Type $[1, 0, 0]$

$$L = \begin{pmatrix} -2\lambda & & \\ & \lambda \frac{a-c}{a} & dx \\ & dx & \lambda \frac{a-b}{a} \end{pmatrix}$$

d'où on calcule les valeurs propres

$$\mu_0 = -2\lambda, \quad \mu_1 \mu_2 = ((a-c)(a-b))\lambda^2/a^2 + d^2\lambda/a,$$

correspondant aux vecteurs propres

$$(1, 0, 0), (0, 1, x_1) \text{ et } (0, x_2, 1), \quad \text{avec } x_1 x_2 \leq 0, \quad x_1 x_2 = 0 \text{ ssi } d = 0.$$

(ii) Type $[1, 1, 1]$

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

où

$$\alpha = \lambda + (3a + b + c)x^2, \quad \beta = 2bx^2 + dx, \quad \gamma = 2cx^2 + dx$$

avec les valeurs propres

$$\mu_0 = -2\lambda - dx, \quad \mu_{1/2} = \alpha - \frac{\beta + \gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i(\beta - \gamma).$$

(ii)' Type $[1, 1, -1]$

Il suffit de changer le signe de d dans les expressions de (ii).

Symétrie T_h, T_d, O ou O_h

La linéarisation des équilibres du Type $[1, 0, 0]$ et $[1, 1, 1]$ est obtenue, en posant $b = c$ ou $d = 0$ dans les expressions de (i) et (ii) ci-dessus.

(iii) Type \mathbf{I}_2 avec T_h

$$L = \begin{pmatrix} 2ax^2 & 2bxy & & \\ 2cxy & 2ay^2 & & \\ & & & \lambda + bx^2 + cy^2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \lambda + bx^2 + cy^2 \\ \mu_1\mu_2 &= \frac{(b-a)(c-a)}{a^2-bc} \\ \mu_1 + \mu_2 &= a \frac{b+c-2a}{a^2-bc}\end{aligned}$$

(iv) Type $[1, 1, -1]$ avec T_h, T_d

Il suffit de changer le signe de d dans les expressions de (ii).

(v) Type $[1, 1, 0]$ avec O_h, O

$$L = \begin{pmatrix} 2ax^2 & 2bx^2 & \\ 2bx^2 & 2ax^2 & \\ & & -(a+b)x^2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mu_0 = (b-a)x^2, \quad \mu_{1/2} = (-2a \pm 2b)x^2$$

pour les vecteurs propres $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$.

Dégénérescences des équations invariantes par T et T_h

Lemme 1.6

$W = \{(x, y, z) | x, y, z \geq 0\}$ est invariant si $d > 0$.

$W' = \{(x, y, z) | -x, y, z \geq 0\}$ est invariant si $d < 0$.

Démonstration

Comme $x = 0$ implique $\dot{x} = dyz > 0$, si $d > 0$ et $(x, y, z) \in W$, le lemme est une conséquence immédiate de la symétrie.

Lemme 1.7

Pour les équations de bifurcation équivariantes par T_h , tronquées à l'ordre 3, il existe une sphère invariante dans le sens du théorème 1.4, ssi

$$a < 0 \quad \text{et} \quad a + b + c < 0.$$

Démonstration

On cherche des conditions, tq $f(X) = (P(X), X) < 0, \forall X \neq 0$, où

$$P(X) = \begin{pmatrix} x(ax^2 + by^2 + cz^2) \\ y(ay^2 + bz^2 + cx^2) \\ z(az^2 + bx^2 + cy^2) \end{pmatrix}$$

et donc

$$f(X) = a(x^4 + y^4 + z^4) + (b + c)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Posant $x = y = 0, z \neq 0$, on obtient la condition $az^4 < 0, \forall z \neq 0$, ce qui est vrai ssi $a < 0$.

Posant $x = 0, yz \neq 0$, on obtient la condition $a(y^4 + z^4) + (b + c)y^2z^2 < 0$ ce qui est vrai, ssi $2a + b + c < 0$.

Ensuite, on applique la méthode des multiplicateurs de Lagrange à la fonction

$$g(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + (b + c)(xy + xz + yz)$$

sur le triangle $x + y + z = 1; x, y, z > 0$:

$$\nabla g(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$$

mène à

$$\begin{aligned} 2a(x - y) + (b + c)(y - x) &= 0 \\ 2a(y - z) + (b + c)(z - y) &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Si $2a = b + c, f(X) = a(x^2 + y^2 + z^2)^2 < 0, \forall X \neq 0$, car $a < 0$.

Sinon, le système admet une solution unique $x = y = z = 1/3$, l'extremum local de g .

Mais $f((x, x, x)) = 3(a + b + c)x^2 < 0 \quad \forall x$, ssi $a + b + c < 0$.

Existence de cycles homoclines possédant une symétrie T, T_d, T_h, O ou O_h

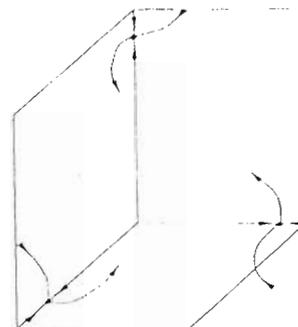
Symétrie T

(i) Typ $[1, 1, 1]$ et $[1, 1, -1]$

Comme W est positif ou négatif invariant, suivant le signe de d , il ne peut pas y avoir une connexion entre un équilibre de typ $[1, 1, 1]$ ou $[1, 1, -1]$ et ses symétriques qui se trouvent hors de W .

(ii) Typ $[1, 0, 0]$

On regarde les variétés stables et instables de l'équilibre sur les axes x, y, z . Si $d < 0$, toutes les variétés instables sont incluses dans $int(W)$ ou ses symétriques, les variétés stables sont incluses dans W' ou ses symétriques, il n'y a donc pas de connexion homocline. Si $d > 0$, on échange W et W' (Fig.3).



Symétrie T_d

Comme le terme quadratique existe aussi, la même argumentation montre l'impossibilité d'existence d'un cycle homocline.

Symétrie T_h

(i) *Typ* $[1, 1, 1]$ et $[1, 1, -1]$

Ici, W et W' sont invariants, parce qu'ils sont bornés par des plans invariants. Le raisonnement du paragraphe précédent montre alors l'impossibilité d'existence d'un cycle.

(ii) *Typ* \mathbb{Z}_s^2

Dans les plans invariants, il n'y a pas de connexion possible à cause des axes invariants. Hors des axes, toutes les solutions de cette isotropie sont soit stables, soit instables. Soit la variété stable, soit la variété instable est incluse dans les plans invariants, où il n'y a pas de connexions à cause des axes invariants.

(iii) *Typ* D_2

Supposons $\lambda < 0$ (sinon, on change $t \mapsto -t$).

Lemme 1.8

Si $a < 0$ et $c < a < b$ ou $b < a < c$, il existe un cycle homocline str.st. dans les plans de symétrie.

(Cet exemple est décrit dans [Guckenheimer&Holmes], qui donnent des conditions d'existence et de stabilité asymptotique suffisantes. Ici, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence.)

Démonstration

Les conditions sont nécessaires, parce que $a < 0$ est associé à l'existence des équilibres et la deuxième inégalité garantit, que les valeurs propres des vecteurs propres hors des axes invariants soient de signes opposés. Si on échange éventuellement y et z , on se ramène au cas: $c < a < b$.

Regardons le flot dans le plan $x = 0$; $y, z \geq 0$:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= y(\lambda + ay^2 + bz^2) \\ \dot{z} &= z(\lambda + az^2 + cy^2)\end{aligned}$$

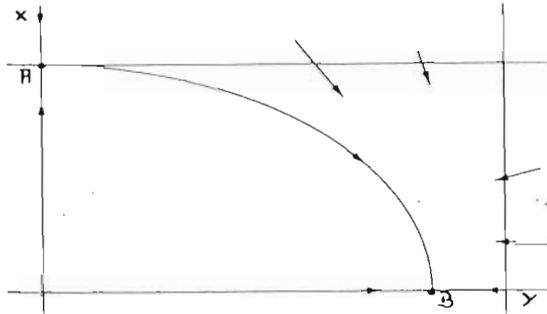
Sur les axes, on trouve les équilibres $A = (0, 0, \sqrt{-\frac{\lambda}{a}})$ et $B = (0, \sqrt{-\frac{\lambda}{a}}, 0)$. Hors des axes, il n'y a pas d'équilibres bifurqués. $U = \{(y, z) | 0 \leq y, 0 \leq z \leq \sqrt{-\frac{\lambda}{a}}\}$ est invariant et attractif, parce que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}z^2\right) = z^2(\lambda + az^2 + cy^2) \leq z^2(\lambda + az^2) \leq 0, \text{ si } \lambda \geq \sqrt{-\frac{\lambda}{a}}.$$

$V = \{(y, z) | 0 \leq y \leq \sqrt{\lambda \frac{b-a}{a^2}}, 0 \leq z \leq \sqrt{-\frac{\lambda}{a}}\} \subset U$ est aussi invariant, car

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) = y^2 (\lambda + ay^2 + bz^2) \leq y^2 \left(ay^2 + \lambda \left(1 - \frac{b}{a} \right) \right).$$

Une branche de la variété instable de A est incluse dans V . Puis, il n'y a ni de points fixes, ni d'orbites périodiques dans V . Alors, l'ensemble ω -limite de cette variété ne contient què le point stable B (Poincaré-Bendixson). On a établi la connexion hétérocline dans ce plan. (Fig.4)



Symétrie O, O_h

1) Typ \mathbf{I}_3

Une connexion homocline n'est pas possible, parce que l'axe $[1,1,1]$ est invariant, et, hors de l'axe, les équilibres sont tous stables ou tous instables.

2) Typ \mathbf{I}_4

Comme pour le cas d'isotropie \mathbf{I}_3 , une connexion est impossible, parce que la linéarisation possède une valeur propre double hors de l'axe.

Pour les équilibres avec moins de symétrie, le raisonnement est équivalent à celui pour le groupe T_h .

1.3.1 Les sous-groupes réductibles: $D_{nh}, C_{nv}, D_{nd}, C_n, C_{nh}$ et S_{2n}

Dans ce paragraphe, on identifie $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $(u, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, tq le plan $(u, 0)$ et l'axe $(0, z)$ sont invariants par la symétrie.

Générateurs de D_{nh} :

$$\sigma_k, 0 \leq k \leq n-1, \text{ la réflexion au plan } u = \exp(2\pi i \frac{k}{n}) \text{ et } -z$$

Générateurs de D_{nd} :

$$\sigma_k, 0 \leq k \leq n-1 \text{ et } \rho_l, 0 \leq l \leq n-1 \text{ rotation autour de l'axe } \lambda(\exp(2\pi i \frac{2l+1}{2n}), 0) \text{ d'ordre } 2$$

Générateurs de C_{nv} :

$$\sigma_k, 0 \leq k \leq n-1$$

Générateurs de C_n :

ρ , rotation autour de l'axe $\lambda(0, 1)$ d'ordre n

Générateurs de C_{nh} :

ρ et

σ , réflexion au plan $z = 0$

Générateurs de S_{2n} :

$-\iota\kappa$, où κ est la rotation autour de l'axe $\lambda(0, 1)$ d'ordre n , si n impair, d'ordre $n/2$, si n pair

Existence de cycles homoclines possédants une symétrie

$D_{nh}, D_{nd}, C_{nv}, C_{nh}, C_n, D_n$ ou S_{2n}

Symétrie D_{nh}

(i) Isotropie C_{nv}

Condition: $u = 0, z \neq 0$

Le plan $z=0$ empêche une connexion.

(ii) Isotropie C_{2v}

Condition: $z = 0, u = r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$

(iii) Isotropie C_s^\pm

Condition: $z \neq 0, u = r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$

Dans ces deux cas, une connexion dans les plans invariants est impossible à cause des axes de symétrie, hors des plans, les équilibres vont être génériquement tous stables ou tous instables (comparez les arguments pour le problème d'isotropie \mathbb{Z}_s^2 avec symétrie T_h).

(iv) Isotropie C_{1h}

Condition: $z = 0, u \neq r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$

(v) Isotropie id

Condition: $z \neq 0, u \neq r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$

Ici, dans ces deux cas, une connexion est empêchée par les plans invariants.

Symétrie C_{nh}

(i) Isotropie C_s^\pm

Condition: $u = r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$

(ii) Isotropie id

Condition: $z \neq 0, u \neq r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$

Des obstructions comme dans le problème avec symétrie D_{nh} empêchent des connexions homoclines.

Symétrie D_{nd}

(i) Isotropie C_{nv}

Condition: $u = 0, z \neq 0$

Si $n > 2$, l'action du groupe dans le plan transverse à l'axe $u = 0$ est isomorphe à l'action de C_n dans le plan complexe, donc absolument irréductible. Les valeurs propres de la linéarisation vont être complexes conjuguées. Il n'y a donc pas de connexions hors de l'axe, parce que les deux équilibres sont soit stables, soit instables. Le cas $n = 2$ va être discuté dans le paragraphe suivant.

(ii) Isotropie C_2

Condition: $z = 0, u = r \exp(2\pi i \frac{2l+1}{2n})$

(iii) Isotropie C_s

Condition: $u = r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$

Les plans de symétrie empêchent une connexion.

(iv) Isotropie id

Il pourrait exister une connexion entre deux équilibres, conjugués par une rotation.

Symétries C_n, C_{nh} et S_{2n}

L'action de ces trois groupes dans le plan $z = 0$ est irréductible, mais pas absolument irréductible. Génériquement, l'origine perd sa stabilité par une bifurcation de Hopf, il n'y a pas d'équilibre bifurqué.

Pour les équilibres bifurqués dans l'axe $u = 0$, des connexions sont possibles pour C_2, C_{2h} et S_2 . Sinon, un raisonnement similaire à celui effectué pour le groupe D_{nd} s'applique.

Symétrie D_n

(i) Isotropie C_n

Condition: $u = 0, z \neq 0$

Si $n > 2$, les équilibres sont soit stables, soit instables hors des axes et comme pour les équilibres d'isotropie C_{nv} dans le problème avec symétrie D_{nd} , il n'y a pas de connexion.

(ii) Isotropie C_s^\pm

Condition: $u = r \exp(2\pi i \frac{k}{n}), z = 0$

(iii) Isotropie id

Dans ces deux cas, des connexions sont possibles.

Sauf dans le cas d'isotropie C_{2v} dans le problème avec symétrie D_{2d} , aucune connexion homocline ne peut être incluse dans un plan de symétrie et alors ne peut être str.st. dans le sens de notre définition.

Le cycle homocline avec symétrie D_{2d} entre les équilibres d'isotropie C_{2v}

Les équations:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + dxz + x(ax^2 + by^2 + cz^2) \\ \dot{y} &= \lambda y - dyz + y(ay^2 + bx^2 + cz^2) \\ \dot{z} &= \mu z + \gamma(x^2 - y^2) + z(\alpha z^2 + \beta(x^2 + y^2))\end{aligned}$$

Les équilibres:

$$x = y = 0, z = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}} \text{ ssi } \mu\alpha < 0$$

La linéarisation:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda + dz + cz^2 & & \\ & \lambda - dz + cz^2 & \\ & & -2\mu \end{pmatrix}$$

Hors de l'axe invariant, l'équilibre est un col, nécessaire pour un cycle, ssi

$$|d| \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}} > \left| \lambda - c \frac{\mu}{\alpha} \right|.$$

Dans le plan $y = 0$, les équations sont

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + dxz + x(ax^2 + cz^2) \\ \dot{z} &= \mu z + \gamma x^2 + z(\alpha z^2 + \beta x^2), \end{aligned}$$

ou, en posant $z \mapsto dz$, $x \mapsto \sqrt{\gamma}x$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + xz + x(ax^2 + cz^2) \\ \dot{z} &= \mu z \pm x^2 + z(\alpha z^2 + \beta x^2), \end{aligned}$$

Si $\gamma > 0$, le semi-plan $z \geq 0$ est invariant. Mais dans ce plan, $z = +\sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}$ est instable, une connexion n'est pas possible.

Les équations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + xz + x(ax^2 + cz^2) \\ \dot{z} &= \mu z - x^2 + z(\alpha z^2 + \beta x^2), \end{aligned}$$

ont été traitées dans [Armbruster, Guckenheimer, Holmes]. On ne sait pas donner des conditions précises pour l'existence d'un cycle homocline. Dans leur Lemme 3.3, ils donnent une indication :

Lemme 1.9

Si $a, c, \alpha, \beta < 0, \mu > 0, \lambda - c\frac{\mu}{\alpha} - \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}} < 0 < \lambda - c\frac{\mu}{\alpha} + \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}$ et soit $\mu - \lambda\frac{\beta}{\alpha} > 0$ et λ petit, soit $\lambda > 0$,

toutes les orbites dans $Q = \{(x, z) | x > 0, z \leq 0\}$ s'approchent de l'équilibre $(x, z) = (0, -\sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}})$.

Dans des cas particuliers précis, il faut vérifier, que $W^u((0, \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}))$ coupe l'axe $y = z = 0$ transverse.

On pose

$$x_i(t) = q_i(t) + z_i(t), \quad \forall t \in [-\omega_i, \omega_{i+1}]$$

z_i vérifie le problème faiblement nonlinéaire:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{z}_i(t) - A_i(t)z_i(t) = g_i(z_i(t), \mu, t) \\ z_{i-1}(\omega_i) - z_i(-\omega_i) = b_i \\ \langle \varphi_i, z_i(0) \rangle = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} A_i(t) &= D_x f(q_i(t), 0) \\ g_i(z, \mu, t) &= f(q_i(t) + z, \mu) - f(q_i(t), 0) - A_i(t)z \\ b_i &= q_i(-\omega_i) - q_{i-1}(\omega_i). \end{aligned}$$

Remarquons, que $g_i(z, \mu, t) = O(|\mu| + |z|^2)$.

On va supposer les hypothèses suivantes:

- A) $Re(\text{spec}(D_x f(p_i, 0))) \geq \alpha > 0$, indépendant de i , c.à.d. les équilibres sont uniformément hyperbolique.
- B) $\dot{q}_i(t)$ est la seule solution bornée de

$$(3) \quad \dot{z}(t) = A_i(t)z(t), \quad \text{pour tout } i$$

- C) $T_i(t, s)$, la matrice fondamentale de (3), possède une dichotomie exponentielle, c.à.d. il existe des projections

$$P_{\pm}^i, Q_{\pm}^i = id - P_{\pm}^i, \quad P_{\pm}^i : \mathbb{R}_{\pm} \mapsto L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

et $K > 0$ tq

$$(i) \quad P_{\pm}^i(t)T_{\pm}^i(t, s) = T_{\pm}^i(t, s)P_{\pm}^i(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_{\pm}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} |T(t, s)P_{\pm}^i(s)| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_{\pm}, s \leq t \\ |T(t, s)Q_{\pm}^i(s)| &\leq Ke^{-\alpha(s-t)}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_{\pm}, t \leq s \end{aligned}$$

- D) $\exists \omega > 0, M \geq 1$, indépendant de i , tq $\forall \omega_i \geq \omega, i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} Im P_{-}^i(-\omega_i) \oplus Im Q_{+}^{i-1}(\omega_i) &= \mathbb{R}^n \\ \|P(Im Q_{+}^{i-1}, Im P_{-}^i(-\omega_i))\| &\leq M \end{aligned}$$

où $P(X_1, X_2)$ dénote la projection unique avec $Im(P) = X_1$ et $Ker(P) = X_2$.

On note, que

$$\begin{aligned} Im P_{+}^i(s) &= T_{q_i(s)} W^s(p_{i+1}) \text{ et} \\ Im Q_{-}^i(s) &= T_{q_i(s)} W^u(p_i). \end{aligned}$$

(C) est donc automatiquement vérifié, parce que les variétés stables et instables possèdent des dichotomies exponentielles.

L'hypothèse **(B)** est équivalente à la condition

$$T_{q_i(0)}W^s(p_i + 1) \cap T_{q_i(0)}W^u(p_i) = \langle \varphi_i \rangle,$$

qui implique $\dim(Im P_+^i(0) + Im Q_-^i(0)) = n - 1$. Dans nos exemples, avec la dimension instable $i(p_i) = 1$ **(B)** va être vérifié.

On définit ψ_0^i , tq

$$\langle \psi_0^i \rangle = (Im P_+^i(0) + Im Q_-^i(0))^\perp, \quad |\psi_0^i| = 1$$

et $\psi^i(s)$ comme la solution de l'équation variationnelle adjointe

$$(3) \quad \dot{\psi}_i = -\bar{A}_i^T(s)\psi_i, \quad \psi_i(0) = \psi_0^i.$$

En fait, $\psi^i(s)$ est la seule solution bornée et vérifie

$$|\psi^i(s)| < Ke^{-\alpha|s|}.$$

En général, il est impossible, de trouver une solution de (2) pour $\mu \neq 0$. L'astuce est de permettre à $z(t)$ d'avoir un saut au temps $t = 0$ dans la direction de ψ_0 . Une 'vraie' solution de (1) $_\mu$ dans U_ϵ correspond évidemment à une solution de (2), dont tous les sauts sont de taille 0.

Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité d'une solution de (2), continue par morceaux.

Théorème 2.1[Lin,Thm 3.1]

Dans le cadre précédent et sous les hypothèses **(A)**-**(D)**, il existent $C, \hat{\omega}, \mu_1, \epsilon_1 > 0$ tq $\forall \{\omega_i\}_{i \in \mathbf{Z}}, \omega_i \geq \hat{\omega}, |\mu| \leq \mu_1$, il existe dans U_ϵ une solution unique $x(t)$ de (1), avec des sauts dans les Σ_i de la forme $\xi_i \psi_i^0$, $\xi_i \in \mathbf{R}$ et

$$\xi_i = G_i(\omega, \mu) = \int_{-\omega_i}^{\omega_{i+1}} \langle \psi_i(s), g_i(z_i(s), \mu, s) \rangle ds + \langle \psi_i(-\omega_i), z_i(-\omega_i) \rangle - \langle \psi_i(\omega_{i+1}), z_i(\omega_{i+1}) \rangle$$

$$\|z_i\|_{C^0} \leq C(e^{-\alpha\omega} + |\mu|),$$

$$D_\mu G_i(\omega, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \psi_i(s), D_\mu f(q_i(s), 0) \rangle ds + O(e^{-\alpha\omega} + |\mu|)$$

avec $\omega = \inf_{i \in \mathbf{Z}} \{\omega_i\}$.

2.2 Application aux cycles homoclines

Lemme 2.2

Supposons, que, dans le cadre du théorème de Lin, $f(x, 0)$ soit équivariant par Γ . Soit $\sigma \in \Gamma$ de l'ordre l , tel que $p_{i+1} = \sigma p_i$, $q_{i+1} = \sigma q_i$, $\forall i$ et $i(p_0) = 1$. On suppose aussi que p_0 est hyperbolique, et que $f(x, \mu)$ est équivariant par σ .

Alors, le théorème de Lin s'applique et, si $\omega = \{\omega_i\}$, avec $\omega_i = \omega_j$, $\forall i, j \in \mathbf{Z}$, alors

$$G_i(\omega, \mu) = \pm G_j(\omega, \mu)$$

Démonstration

Voyons d'abord, que les hypothèses **(A)** - **(D)** sont vérifiées. Le point d'équilibre p_0 est hyperbolique, donc tous les points de son orbite de groupe p_i le sont aussi, ce qui implique **(A)**. **(C)** est, comme déjà remarqué, une conséquence de **(A)**. **(B)** est vérifié, parce que $i(p_i) = 1$. **(D)** est une conséquence de [Vanderberbauwhede, Fiedler, lemme 7].

Ensuite, on va montrer, que

- (i) $\psi_{i+1}(t) = \pm \sigma \psi_i(s)$ et
- (ii) $z_{i+1}(t) = \sigma z_i(s)$.

Comme σ est représenté par une matrice orthogonale et dans l'expression pour $G(\omega, \mu)$ n'apparaissent que des produits scalaires de z_i et ψ_i , (i) et (ii) démontrent déjà le lemme.

- (i) Comme les projections P_{\pm}^i sont conjuguées par symétrie, on a $\psi_0^{i+1} = \pm \sigma \psi_0^i$. Par multiplication de (3) avec σ et les propriétés d'équivariance, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{i+1}(t) &= \pm \sigma \dot{\psi}_i(t) = \mp \sigma D_x f(q_i(t), 0) \psi_i(t) \\ &= \mp D_x f(\sigma q_i(t), 0) \sigma \psi_i(t) \\ &= -D_x f(q_{i+1}(t), 0) \psi_{i+1}(t) \end{aligned}$$

d'où on conclut (i) par l'unicité de la solution ψ_i .

- (ii) On va se servir de l'unicité de la solution de l'équation (2). On obtient le résultat en substituant $z_{l+1}(t) \mapsto \sigma z_l(t)$, pour tout l et en utilisant

$$\sigma A_i(t) = A_{i+1}(t) \sigma, \quad \sigma b_i = b_{i+1}, \quad \sigma \varphi_i = \varphi_{i+1} \quad \text{et} \quad \sigma g_i(z, \mu, t) = g_{i+1}(\sigma z, \mu, t).$$

Remarque

Dans la démonstration, on a vu, qu'on peut toujours choisir $\psi_0^{i+1} = \sigma \psi_0^i$ tel qu'on ait

$$G_i(\omega, \mu) = G_j(\omega, \mu), \quad \forall i, j \in \mathbf{Z}.$$

Corollaire 2.3

Si, dans le cadre précédent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \psi_i(s), D_\mu f(q_i(s), 0) \rangle ds \neq 0,$$

il existe $\hat{\omega}, \mu_1, \epsilon_1 > 0$ et

$$\hat{\mu} : \{\omega > \hat{\omega}\} \mapsto \{|\mu| < \mu_1\} \in C^k$$

tq $G(\omega, \hat{\mu}(\omega)) = 0, \forall \omega > \hat{\omega}$.

On pose $x_i(t) = q_i(t) + z_i(t, \omega, \hat{\mu}(\omega))$.

La solution

$$x(t) = x_i(t \bmod 2\omega - \omega), \quad 2i\omega \leq t < 2(i+1)\omega$$

possède la période minimale $2l\omega$, la symétrie $\sigma x(t) = x(t + 2\omega)$ et est unique dans U_{ϵ_1} jusqu'aux translations du temps.

Démonstration

Suivre la démonstration de [Lin, Thm.4.3].

2.3.1 Perturbations du cycle T_h

Corollaire 2.4

Supposons, que

$$\dot{X} = f(X, \mu), \quad X \in \mathbb{R}^3, f \in C^k(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3), k \geq 2.$$

est, pour $\mu = 0$, équivariant par $T_h \subset \mathcal{O}(3)$ et admet un cycle homocline Q , consistant d'une connexion hétérocline $q_0(t)$ entre deux équilibres p_0 et p_1 d'isotropie D_2 , et de son orbite de groupe.

Supposons, que $f(X, \mu)$ est équivariant par

$$(i) \text{ la matrice } \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = id$$

$$\text{ou (ii) la matrice } \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\gamma}^6 = id.$$

Alors, pour un sous-ensemble ouvert et dense dans l'espace affine \mathcal{X} des fonctions $g \in C^k$, qui vérifient (i) (resp.(ii)) et pour lesquelles $g(X, 0) = f(X, 0)$, il existe $\hat{\omega}, \mu_1, \epsilon_1 > 0$ et

$$\hat{\mu} : \{\omega > \hat{\omega}\} \mapsto \{|\mu| < \mu_1\} \in C^k$$

tq $G(\omega, \hat{\mu}(\omega)) = 0, \forall \omega > \hat{\omega}$.

On pose $X_i(t) = q_i(t) + z_i(t, \omega, \hat{\mu}(\omega))$.

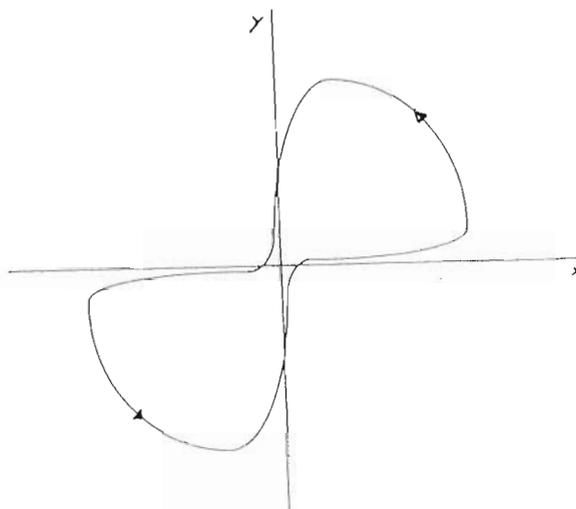
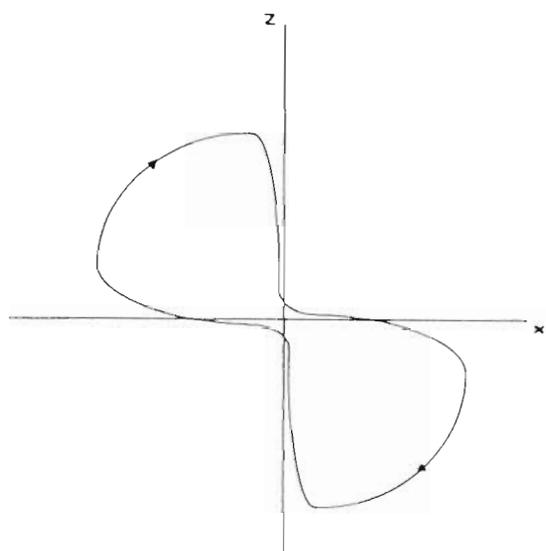
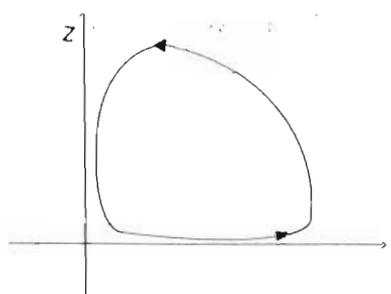
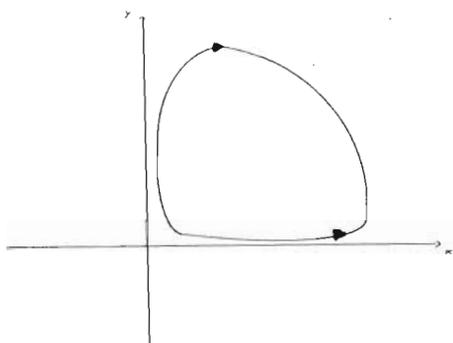
La solution

$$X(t) = X_i(t \bmod 2\omega - \omega), \quad 2i\omega \leq t < 2(i+1)\omega$$

a la période minimale 6ω (resp. 12ω), la symétrie $\gamma X(t) = X(t+2\omega)$ (resp. $\tilde{\gamma} X(t) = X(t+2\omega)$) et est unique dans un ϵ_1 -voisinage du cycle à une translation du temps près. (Fig.6)

Remarque:

Si on cherche dans le cycle complet Q des cycles de la forme Q_α , on ne trouve que les cycles $Q_\gamma, Q_{\tilde{\gamma}}$ et leurs symétriques.



Démonstration

Supposons $p_0, p_1 \in \Sigma = \{x = 0\}$, c.à.d. le plan yz , et $q_0(t) \in \{(x, y, z) | x = 0, y > 0, z > 0\}$.
On note d'abord, que

$$\psi_0(s) = |\psi_0(s)| \cdot (\pm 1, 0, 0), \quad |\psi_0(s)| \neq 0,$$

parce que $\psi_0^0 \perp \Sigma = TW^s(p_1)$ et $A_0(s)$ commute avec la réflexion $\sigma : x \mapsto -x$

$$\sigma A_0(s) = \sigma D_X f(q_0(s), 0) = D_X f(\sigma q_0(s), 0) \sigma = D_X f(q_0(s), 0) \sigma = A_0(s) \sigma$$

et laisse donc Σ invariant.

On montre maintenant, que pour $V \subset \mathcal{X}$ ouvert et dense,

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \psi_0(s), D_\mu f(q_0(s), 0) \rangle ds \neq 0.$$

Comme

$$|\mathcal{F}[f]| \leq \|f\|_{C^0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(s)| ds \leq K \|f\|_{C^k},$$

\mathcal{F} est continu, $\text{Ker}(\mathcal{F})$ est un sous-espace fermé et il suffit de montrer, que $\mathcal{F} : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ n'est pas zéro.

La somme de $f(\cdot, 0)$ et des matrices

$$L_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \mu & \mu \\ \mu & 0 & \mu \\ \mu & \mu & 0 \end{pmatrix} \text{ resp. } L_{\bar{\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & \mu & -\mu \\ \mu & 0 & \mu \\ -\mu & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à \mathcal{X} mais pas à $\text{Ker}(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(\cdot, 0) + L_\gamma(\cdot)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \psi_0(s), D_\mu(L) \cdot q_0(s) \rangle ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(s)| (q_0^y(s) + q_0^z(s)) ds \neq 0 \end{aligned}$$

où $q_0^y(s)$ et $q_0^z(s)$ dénotent les projections de l'orbite sur les axes des coordonnées.
Maintenant, on peut appliquer le corollaire 2.3 pour terminer la démonstration.

Le corollaire suivant montre le genre de résultats, qu'on peut obtenir, si on garde plus de symétrie. En fait, T est le seul sous-groupe non-cyclique de $T_h \cap \mathcal{SO}(3)$, ne préservant donc pas les plans de symétrie.

Corollaire 2.5

Dans le cadre du corollaire 2.4, supposons, que $f(X, \mu)$ est équivariant par $T \subset \mathcal{SO}(3)$.

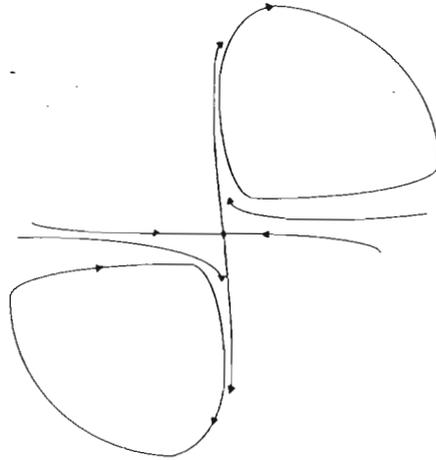
Alors, pour un sous-ensemble ouvert et dense dans l'espace X des fonctions C^k , qui vérifient les hypothèses précédentes, il existe $\hat{\omega}, \mu_1, \epsilon_1 > 0$ et

$$\hat{\mu}_+, \hat{\mu}_- : \{\omega > \hat{\omega}\} \mapsto \{|\mu| < \mu_1\} \in C^k$$

tq $G(\omega, \hat{\mu}_+(\omega)) = \tilde{G}(\omega, \hat{\mu}_-(\omega)) = 0, \hat{\mu}_-(\omega)\hat{\mu}_+(\omega) < 0, \forall \omega > \hat{\omega}.$

\tilde{G} dénote le saut correspondant au cycle σQ_γ , conjugué par une réflexion $\sigma \in \mathcal{O}(3) \setminus \mathcal{SO}(3)$

Il existe alors des orbites périodiques bifurquées, de période 6ω dans un voisinage du cycle homocline Q_γ ou, pour le signe de μ opposé, dans le voisinage de σQ_γ . (Fig.7)



Démonstration

La symétrie du cycle symétrique est $\kappa = \sigma\gamma\sigma \in T$. On va d'abord montrer, qu'on a bien $\mathcal{F}[f] \neq 0$ dans un ouvert dense. Comme l'action de T est absolument irréductible, on se sert d'une perturbation non-linéaire. Posant $f_0 : (x, y, z) \mapsto (yz, xz, yx)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f + \mu f_0] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \psi_0(s), f_0(q_0(s)) \rangle ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(s)| q_0^y(s) q_0^z(s) ds > 0 \end{aligned}$$

Pour établir la relation entre μ_+ et μ_- , on montre, que

$$(i) D_\mu G(\omega, 0) = D_\mu \tilde{G}(\omega, 0)$$

$$\text{et (ii) } G(\omega, 0) = -\tilde{G}(\omega, 0).$$

Evidemment (i) et (ii) impliquent, que μ_+ et μ_- , petits, ne peuvent pas avoir le même signe, si ω est assez grand.

On dénote $\tilde{q}_1(t) = \sigma q_1(t)$ et $\tilde{q}_2(t) = \sigma q_2(t)$.

Remarquons, que $q_0(t) = \sigma q_0(t)$, $\psi_0(t) = -\sigma \psi_0(t)$.

On peut supposer, que $\psi_0(s) = \tilde{\psi}_0(s)$, où $\tilde{\psi}_0(s)$ est la solution de l'équation variationnelle adjointe pour le cycle $q_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2$.

On va vérifier (i):

Notons $z(t, \mu)$ pour la solution de (2), dépendant de μ .

$$D_\mu G(\omega, 0) = \int_{-\omega}^{\omega} \langle \psi_0(s), D_\mu g_0(z_0(s, 0), 0, s) + D_z g_0(z_0(s, 0), 0, s) D_\mu z_0(s, 0) \rangle ds + \\ \langle \psi_0(-\omega), D_\mu z_0(-\omega, 0) \rangle - \langle \psi_0(\omega_0), D_\mu z_0(\omega_0, 0) \rangle$$

Remarquons que $D_z g(z, 0, t) = 0$ et que

$$D_\mu g_0(z_0(s, 0), 0, s) = D_\mu f(q_0(t), 0) = D_\mu g_0(\tilde{z}_0(s, 0), 0, s).$$

Il suffit alors de démontrer que

$$D_\mu z(t, 0) = D_\mu \tilde{z}(t, 0).$$

Mais $u(t) = D_\mu z(t, 0)$ et $\tilde{u}(t) = D_\mu \tilde{z}(t, 0)$ sont solutions de

$$\dot{v}(t) - A(t)v(t) = D_\mu f(q_0(t), 0)$$

avec les conditions de bord

$$v(\omega) = v(-\omega) \text{ et } \langle v(0), \varphi_0 \rangle = 0.$$

On regarde le problème homogène associé

$$\dot{v}(t) - A(t)v(t) = 0$$

avec les mêmes conditions de bord.

La seule solution bornée non-triviale de $\dot{v}(t) - A(t)v(t) = 0$ est $\dot{q}(t)$, mais $\dot{q}(0) = \varphi_0$ ne vérifie pas la condition supplémentaire $\langle v(0), \varphi_0 \rangle = 0$. Les autres solutions possèdent des dichotomies exponentielles différentes pour $t \rightarrow \pm\infty$ ou restent du même côté du plan invariant, ce qui démontre l'unicité de la solution du problème inhomogène pour ω assez grand et donc aussi (i).

Pour démontrer (ii), on montre d'abord, que $\tilde{z}_i(t) = \sigma z_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, $\mu = 0$:

$\tilde{z}_0(t)$ vérifie

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}_0(t) - A_0(t)\tilde{z}_0(t) = g_0(\tilde{z}_0(t), 0, t) \\ \tilde{z}_3(\omega) - \tilde{z}_0(-\omega) = q_0(-\omega) - \tilde{q}_3(\omega) \\ \langle \varphi_0, \tilde{z}_0(0) \rangle = 0 \end{cases}$$

$z_0(t)$ vérifie

$$\begin{cases} \dot{z}_0(t) - A_0(t)z_0(t) = g_0(z_0(t), 0, t) \\ z_3(\omega) - z_0(-\omega) = q_0(-\omega) - q_3(\omega) \\ \langle \varphi_0, z_0(0) \rangle = 0 \end{cases}$$

Le même genre d'équation peut être obtenu pour $i = 1, i = 2$.

Comme A_0 et $g_0(\cdot, 0, t)$ sont équivariants par σ , on voit que σz_0 vérifie les mêmes équations que \tilde{z}_0 . L'unicité de la solution pour ce problème garantit que $\tilde{z}_i(t) = \sigma z_i(t)$, $i = 0, 1, 2$.

Maintenant, on calcule

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_0(\omega, 0) &= \int_{-\omega}^{\omega} \langle \tilde{\psi}_0(s), g_0(\tilde{z}_0(s), 0, s) \rangle ds \\
 &= \int_{-\omega}^{\omega} \langle \psi_0(s), g_0(\sigma z_0(s), 0, s) \rangle ds \\
 &= \int_{-\omega}^{\omega} \langle \psi_0(s), \sigma g_0(z_0(s), 0, s) \rangle ds \\
 &= \int_{-\omega}^{\omega} \langle \sigma \psi_0(s), g_0(z_0(s), 0, s) \rangle ds \\
 &= \int_{-\omega}^{\omega} \langle -\psi_0(s), g_0(z_0(s), 0, s) \rangle ds \\
 &= -G_0(\omega, 0).
 \end{aligned}$$

2.3.2 Perturbations du cycle D_{2d}

Pour cette symétrie, le même genre de résultats est possible. Les formulations des corollaires sont équivalentes, si on remplace la symétrie T_h par D_{2d} , T par $D_2 = D_{2d} \cap \mathcal{SO}(3)$ et les éléments γ et $\tilde{\gamma}$ par κ et $\tilde{\kappa}$ avec

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \kappa^2 = id \text{ et } \tilde{\kappa}^4 = id$$

Les fonctions équivariantes, qui permettent des perturbations perpendiculaires aux plans de symétrie sont:

$$L_\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{\tilde{\kappa}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

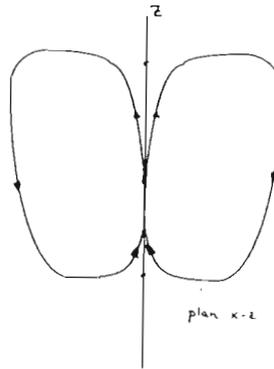
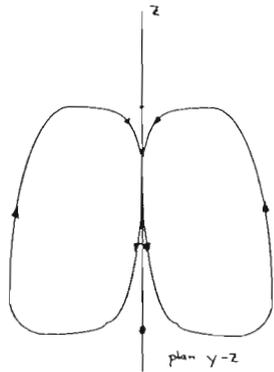
et

$$f_0 : (x, y, z) \mapsto (yz, -xz, 0).$$

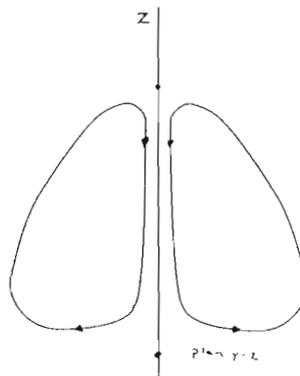
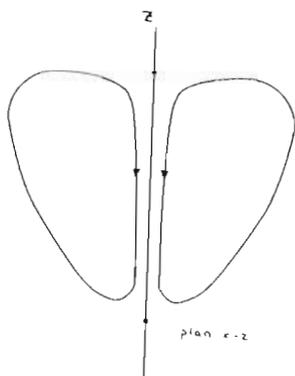
(Fig.8)



Symétrie κ



Symétrie $\tilde{\kappa}$



Symétrie D_2

Chapitre 3: Brisure de symétrie spontanée- la bifurcation résonante des cycles homoclines

Suivant les résultats de [Melbourne] et [Dos Reis], la perte de stabilité asymptotique d'un cycle homocline est associée à une 1 : 1-résonance des valeurs propres 'dominantes'.

Dans ce paragraphe, on va garder la symétrie et, à cause de la st.str., observer la persistance du cycle.

Les résultats de [Lin] ne semblent pas bien adaptés à l'étude des orbites périodiques bifurquées sous ces conditions. Les perturbations sont non-génériques, parce qu'elles gardent la symétrie, et les valeurs propres des équilibres, peu importantes pour ces méthodes, jouent ici un rôle crucial.

3.1 Les hypothèses

3.1.1 Le cadre

L'équation

$$(1) \quad \dot{X} = F(X, \alpha), \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

$F(\cdot, \alpha)$ équivariant par $\Gamma \subset \mathcal{O}(n)$ discret, admet un cycle homocline Q^α :

$$F(p_0, \alpha) = 0, \forall \alpha \in (-\hat{\alpha}, \hat{\alpha}), \lim_{t \rightarrow \pm\infty} q_0(t, \alpha) = p_{0/1}, \quad Q^\alpha = \{\gamma q_0(t, \alpha), t \in \mathbb{R}, \gamma \in \Gamma\}.$$

Dénotons $\sigma_0 \in \Gamma$ un élément, qui transporte p_0 en p_1 .

Soit G le sous-groupe d'isotropie de p_0 et H le sous-groupe d'isotropie de $q_0(t)$.

Evidemment, on a, avec la notation $G^\sigma = \sigma G \sigma^{-1}$:

$$\forall \sigma \in \sigma_0 G : \sigma p_0 = p_1, G^\sigma = G^{\sigma_0}, \quad H \subset G \cap G^\sigma \text{ et } p_0 \in \Sigma \cap \sigma^{-1} \Sigma,$$

où $\Sigma = \text{Fix } H$.

Supposons, que $\dim \Sigma < n$ et, que p_1 est hyperbolique, linéairement stable dans Σ :

$$\text{Re spec}(DF(p_1)) \neq 0, \quad \text{Re spec}(DF(p_1) |_\Sigma) < 0$$

3.1.2 La condition de résonance

Le spectre de la linéarisation autour des équilibres se décompose comme suit:

$$\text{spec}(DF(p_1)) = \{\nu(\alpha), -\mu(\alpha), (-\mu_k(\alpha))_{1 \leq k \leq n-2}\}$$

avec $\nu(\alpha)$ et $-\mu(\alpha)$ valeurs propres simples,

$\nu(0) = \mu(0) > 0, \nu'(0) \neq -\mu'(0)$ et $\text{Re } \mu_k(0) > \mu_1 > \mu(0) \forall k$.

On appelle les sous-espaces orthogonaux associés aux valeurs propres $\nu, -\mu, (-\mu_k)_k$

$$E^u(p_i), \quad E^s(p_i) \text{ resp. } E^{ss}(p_i).$$

Ils sont invariants par DF et par l'action de G .

3.1.3 L'hypothèse de genericité

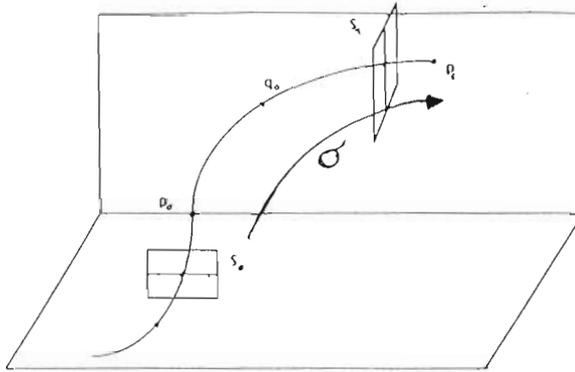
Supposons que q_0 arrive génériquement dans p_1 , c.à.d.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{q}(t)}{|\dot{q}(t)|} \in E^s(p_1).$$

Aussi, on permet de perturber F entre les équilibres, tel qu'un certain coefficient du flot entre les équilibres soit de module différent de 1.

Note que $E^s(p_0) \subset \sigma^{-1}\Sigma$, car $E^s(p_1) \subset \Sigma$ et $E^s(p_1) = \sigma E^s(p_0)$.

3.2 L'idée



Le flot au voisinage du cycle induit une application $\Psi : U \subset S_0 \mapsto S_1$, malheureusement peu régulière. La section S_1 est symétrique à S_0 : $S_1 = \sigma_0 S_0$.

Alors, l'application

$$\tilde{\Psi} = \sigma^{-1}\Psi : U \mapsto S_0$$

possède un point fixe, correspondant à l'orbite homocline, qui perd sa stabilité (on ne l'a pas démontré et, en fait, ce n'est pas toujours vrai), quand α traverse 0.

On s'attend à trouver une orbite périodique bifurquée pour $\tilde{\Psi}$, ensemble avec son orbite de groupe. Si les points de période deux sont conjugués par un élément $\kappa \in G$, ils correspondent à un point fixe de l'application $\kappa\sigma^{-1}\Psi$.

On va chercher des orbites périodiques $q_\sigma(t)$ au voisinage d'un cycle Q_σ , correspondant à un point fixe de l'application $\tilde{\Psi}^N$, pour un N dépendant de la période. On trouvera, qu'elles possèdent automatiquement une symétrie de la forme

$$\sigma q_\sigma(t) = q_\sigma(t + \omega) \quad \text{pour un } \omega \text{ convenable.}$$

3.3 Le résultat

Théorème 3.1

Dans le cadre précédent et sous les hypothèses de résonance et de genericité,

$$\sigma_0 G = L \cup \hat{L}, \quad \text{où } |L| = |\hat{L}| \text{ et } L \cap \hat{L} = \emptyset$$

et pour tous les $\gamma \in L$, il existe $\alpha_0 < \hat{\alpha}$ (dépendant de γ) et des applications C^1

$$\Phi_\gamma : \begin{cases} \left(\begin{array}{l} \text{ou } (0, \alpha_0) \\ \text{ou } (-\alpha_0, 0) \end{array} \right) & \mapsto C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) \\ \alpha & \mapsto \Phi_\gamma(\alpha)(\cdot) \end{cases}$$

et

$$\omega_\gamma : \begin{cases} \left(\begin{array}{l} \text{ou } (0, \alpha_0) \\ \text{ou } (-\alpha_0, 0) \end{array} \right) & \mapsto \mathbf{R}_+ \\ \alpha & \mapsto \omega_\gamma(\alpha) \end{cases}$$

tq $\Phi_\gamma(\alpha)(\cdot)$ est une solution périodique de (1), symétrique de la forme

$$\gamma \Phi_\gamma(\alpha)(t) = \Phi_\gamma(\alpha)(t + \omega).$$

Hors d'un voisinage de $\{\gamma^i p_0, i \in \mathbf{Z}\}$, les $\Phi_\gamma(\alpha)$ convergent pour $\alpha \rightarrow 0$ vers le cycle Q_γ^0 et $\omega(\alpha)$ tend vers ∞ .

Pour $\tau \in G \cap G^{\sigma_0}$,

$$\gamma \in L \Rightarrow \gamma^\tau = \tau \gamma \tau^{-1} \in L \text{ et } \Phi_{\gamma^\tau}(\alpha) = \tau \Phi_\gamma(\alpha),$$

pour tous les α dans la domaine de définition de Φ_γ .

Pour α petit, il existe un voisinage de Q_γ , tq tous les orbites périodiques $q(t)$ dans ce voisinage possèdent une telle symétrie

$$\gamma q(t) = q(t + \omega)$$

pour un ω convenable.

3.4 Démonstration

La démonstration demande une étude détaillée du flot local au voisinage de p_0 et une étude globale du flot au voisinage de q_0 loin de p_0 et p_1 . D'abord, on va exposer les résultats de [Deng], cités dans [Chow&Deng&Fiedler], qui permettent une étude locale en variables régulières. Pour appliquer ces résultats, on va être obligé de 'linéariser' la variété stable et la variété instable.

3.4.1 Les variables de Shilnikov - les résultats de Deng

Lemme 3.2 (Linéarisation de $W^{s/u}$ équivariante)

Soit $X = (x, y) \in \mathbf{R}^{k+l}$,

$$\dot{X} = F(X, \alpha), F \in C^\infty(\mathbf{R}^{k+l} \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^{k+l}), \text{ équivariant par } \Gamma \subset \mathcal{O}(k+l).$$

Supposons $F(0, \alpha) = 0$ et $DF(0)$ possède une forme bloc-diagonale:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + f(x, y, \alpha) \\ \dot{y} &= B(\alpha)y + g(x, y, \alpha) \end{aligned}$$

avec $\text{spec}(A) < 0$, $\text{spec}(B) > 0$ et

$$f(0,0,\alpha) = 0, \quad Df(0,0,\alpha) = 0, \quad g(0,0,\alpha) = 0, \quad Dg(0,0,\alpha) = 0.$$

L'action de Γ est alors diagonale:

$$\gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x x \\ \gamma_y y \end{pmatrix},$$

parce que γ commute avec les projections sur les sous-espaces invariants de DF . On sait, que W_{loc}^s et W_{loc}^u , la variété stable (resp. instable) dans un voisinage V de l'origine, sont donnés par

$$y = h^s(x, \alpha) \quad \text{resp.} \quad x = h^u(y, \alpha)$$

avec

$$h^s \in C^\infty(E^s \cap V \times \mathbf{R}, E^u), \quad h^u \in C^\infty(E^u \cap V \times \mathbf{R}, E^s) \quad \text{et} \quad D_x h^s(0, \alpha) = 0, \quad D_y h^u(0, \alpha) = 0.$$

L'équivariance des équations implique, que

$$\begin{aligned} \gamma_x h^u(y, \alpha) &= h_u(\gamma_y y, \alpha) \\ \gamma_y h^s(x, \alpha) &= h_s(\gamma_x x, \alpha) \end{aligned}$$

et, que, dans un voisinage de l'origine suffisamment petit, le changement de variables

$$\begin{aligned} \varphi : (x, y, \alpha) &\mapsto (x', y') \\ x'(x, y) &= x - h_u(y, \alpha) \\ y'(x, y) &= y - h_s(x, \alpha) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme équivariant et C^∞ dans α .

Dans les nouvelles variables, W_{loc}^s et W_{loc}^u sont inclus dans les sous-espaces linéaires $y' = 0$ resp. $x' = 0$.

Démonstration

Tous les conclusions sont immédiates. La variété stable (resp. instable) est invariante par la symétrie, car

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} X(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma X(t) = 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Maintenant, on va présenter les résultats de [Deng]:

Dans le cadre des hypothèses du théorème, on introduit dans une petite boule V autour de p_0 les variables locales $X = (z, y, x) \in E^u \times E^s \times E^{ss}$. Avec le lemme précédent, on peut supposer, que la variété stable et la variété instable sont incluses dans $E^s \times E^{ss}$ resp. E^u .

Dans V , le flot est décrit par

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{z} = \nu_0(\alpha)z + f_z(z, y, x, \alpha) \\ \dot{y} = -\mu_0(\alpha)y + f_y(z, y, x, \alpha) \\ \dot{x} = -A(\alpha)x + f_x(z, y, x, \alpha) \end{cases}$$

où $f_i \in C^\infty$ vérifient

$$\begin{aligned} f_x(z, 0, 0, \alpha) &= 0, & Df_x(0, 0, 0, \alpha) &= 0 \\ f_y(0, y, x, \alpha) &= 0, & Df_y(0, 0, 0, \alpha) &= 0 \\ f_z(z, y, x, \alpha) &= 0, & Df_z(0, 0, 0, \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Après un changement d'échelle de temps, on peut supposer, que $\mu_0(\alpha) = 1$.

On définit les sections, dépendant de δ_0 et δ_1 :

$$\begin{aligned} S_{in}^0 &= \{(z, y, x) | y = \delta_0\} \cap V \\ S_{in}^{s,0} &= \{(y, x) | y = \delta_0, |x| \leq \delta_1\} \cap V \\ S_{out}^0 &= \{(z, y, x) | z = \delta_0\} \cap V \end{aligned}$$

Théorème 3.3[Deng]

Si δ_0 est assez petit, il existe δ_1 et une application $X \in C^\infty$

$$\begin{aligned} X : \{0 < t \leq s\} \times S_{in}^s \times (-\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) &\mapsto V \\ (t; s, x_{in}, \alpha) &\mapsto X(t; s, x_{in}, \alpha) \end{aligned}$$

tq $X(\cdot; s, x_{in}, \alpha)$ est la solution unique du problème de Shilnikov, c.à.d. solution de (2) avec

$$\begin{aligned} z(s, s, x_{in}, \alpha) &= \delta_0 \\ y(0, s, x_{in}, \alpha) &= \delta_0 \\ x(0, s, x_{in}, \alpha) &= x_{in} \end{aligned}$$

On dénote alors

$$\begin{aligned} z_{in} &= z(0, s, x_{in}, \alpha) \\ y_{out} &= z(s, s, x_{in}, \alpha) \\ x_{out} &= z(s, s, x_{in}, \alpha) \\ r &= e^{-s} \end{aligned}$$

Les variables s, x_{in} s'appellent les 'variables de Shilnikov'.

Théorème 3.4[Deng]

Pour δ_0 assez petit, avec

$$0 < \omega < \min_{\alpha} \{\nu_0(\alpha), 1, \mu_1\},$$

il existe C - indépendant de s, x et α voisin 0 -, tel qu'on a les développements asymptotiques suivants quand r tend vers zéro:

$$\begin{aligned} z_{in}(r, x, \alpha) &= r^{\nu_0(\alpha)}(\delta_0 + \varphi_z(x, \alpha) + R_z) \\ x_{out}(r, x, \alpha) &= r(\varphi_x(x, \alpha) + R_x) \\ y_{out}(r, x, \alpha) &= r(\delta_0 + \varphi_y(x, \alpha) + R_y). \end{aligned}$$

R_i et $\varphi_i, i \in \{z, y, x\}$ vérifient

$$\varphi_i \in C^\infty(S_{in}^{s,0} \times \mathbf{R}), \varphi_i(x, \alpha) = O(|x|^2 + |\delta_0|^2)$$

$$\text{et } \|D_r^\beta R_i(r, \cdot, \cdot)\|_{k-\beta} \leq Cr^{\omega-\beta}; 0 \leq \beta \leq k, k \in \mathbf{N}$$

Ici, $\|\cdot\|_k$ dénote la norme C^k par rapport aux variables x, α .

On aura besoin d'un corollaire facile:

Corollaire 3.5

Si, dans le cadre précédent, on pose formellement pour tous $r \geq 0$

$$\begin{aligned} x_{out}(-r, x, \alpha) &= -x_{out}(r, x, \alpha) \\ y_{out}(-r, x, \alpha) &= -y_{out}(r, x, \alpha), \end{aligned}$$

on obtient des fonctions $x_{out}(r, x, \alpha), y_{out}(r, x, \alpha) \in C^1$ pour r voisin de zéro, α petit.

Démonstration

Il suffit de vérifier, que $D_r(rR_x)$ est continu quand $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} |D_r(rR_x)| &\leq |R_x| + r|R_x| \leq Cr^\omega \\ D_r(rR_x)|_{r=0} &= 0 \end{aligned}$$

Les résultats se généralisent sans problèmes au cas équivariant:

Lemme 3.6

Si F équivariant par G , l'action de $\gamma \in G$ est diagonale, c.à.d.

$$\gamma(z, y, x) = (\gamma_z z, \gamma_y y, \gamma_x x)$$

et les fonctions z_{in}, y_{out}, x_{out} sont équivariantes dans le sens suivant:

$$\begin{aligned} z_{in}(r, \gamma_x x, \alpha) &= \gamma_z z_{in}(r, x, \alpha) \\ x_{out}(r, \gamma_x x, \alpha) &= \gamma_x x_{out}(r, x, \alpha) \\ y_{out}(r, \gamma_x x, \alpha) &= \gamma_y y_{out}(r, x, \alpha) \end{aligned}$$

Si $\gamma_y = -1$, il faut choisir $\gamma_x x$ dans $\tilde{S}_{in} = \{(z, y, x) | y = -\delta_0\} = \gamma S_{in}$,
 si $\gamma_z = -1$, il faut changer S_{out} en $\tilde{S}_{out} = \{(z, y, x) | z = -\delta_0\} = \gamma S_{out}$.

Démonstration

Si X résout le problème de Shilnikov du théorème 1, alors γX résout le problème avec des conditions de bord conjuguées par symétrie. Le lemme est donc une conséquence de l'unicité de la solution.

3.4.2 Les équations de bifurcation

On fixe un élément $\sigma \in \sigma_0 G$ et commence la démonstration de notre théorème par

1) L'étude locale

Presque tout est déjà fait. Le flot local au voisinage de p_0 est invariant par G le sous-groupe d'isotropie de p_0 , au voisinage de p_1 par G^σ . Les sections S_{in}^0 et S_{out}^0 sont invariantes par G .

Au voisinage de p_1 , on définit aussi les variables locales (z^1, y^1, x^1) . On choisit l'orientation de $E^s(p_1)$ tq $S_{in}^1 = \{(x^1, y^1, z^1) | y^1 = \delta_0\} = \sigma S_{in}^0$.

2) L'étude globale

La connexion hétérocline $q_0(\alpha)$ entre p_0 et p_1 coupe S_{out}^0 et S_{in}^1 dans $x_{out} = 0, y_{out} = 0$ et $x_{in}^1 = a_x(\alpha), z_{in}^1 = 0$.

L'hypothèse de genericité garantie, que, si δ_0 a été choisi assez petit,

$$(x_{in}^1, z_{in}^1) = (a_x(\alpha), 0) \in S_{in}^1$$

Si on choisit $\hat{\delta}$ assez petit, le flot au voisinage de q_0 induit une application

$$\Pi : \begin{cases} B_{\hat{\delta}} \subset S_{out}^0 \times (-\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) & \mapsto S_{in}^1 \\ ((x_{out}, y_{out}), \alpha) & \mapsto \Pi((x_{out}, y_{out}), \alpha), \end{cases}$$

bien définie comme le 'first-hit-map' et C^∞ .

Remarquons, que Π est équivariant par $G \cap G^\sigma$, car les sections $B_{\hat{\delta}}$ et S_{in}^1 sont invariantes et le flot, composé avec les changements de variables (pour linéariser $W_{0/1}^{s/u}$), est équivariant.

La partie affine de Π s'écrit

$$\left. \begin{aligned} z_{in}^1 &= a_z + b_{zx}x_{out} + b_{zy}y_{out} \\ x_{in}^1 &= a_x + b_{xx}x_{out} + b_{xy}y_{out} \end{aligned} \right\} + O(|x_{out}|^2 + |y_{out}|^2).$$

Les coefficients a_i et b_{ij} dépendent régulièrement de α .

Une orbite périodique, symétrique avec symétrie σ , correspond à une solution $(r, x)(\alpha)$ de l'équation

$$(3) \quad \sigma^{-1} \Pi((x_{out}, y_{out})(r, x, \alpha), \alpha) = (x_{in}, z_{in})(r, x, \alpha)$$

tq $|(x_{out}, y_{out})((r, x)(\alpha), \alpha)| < \hat{\delta}$.

Ceci est vérifié, si $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r(\alpha) = 0$, car $|(x_{out}, y_{out})| = O(r)$. Les solutions correspondant aux orbites périodiques, qui convergent vers le cycle homocline quand α tend vers zéro, vérifient $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r(\alpha) = 0$, parce que $y_{out} = r(\delta + \varphi_y(x) + R_y)$.

On va examiner les implications de la symétrie $G \cap G^\sigma \supset H$ sur la partie affine de Π :

- (i) la partie constante prend valeurs dans Σ
- (ii) la partie linéaire possède une forme bloc-diagonale dans $\Sigma \oplus \Sigma^\perp$.

Il peut y avoir deux cas différents:

(I) $E^s(p_0) \not\subset \Sigma$

Comme $z_{in}^1 \in \Sigma^\perp$ et $y_{out} \in \Sigma^\perp$, on obtient

$$\left. \begin{aligned} z_{in}^1 &= b_{zx}x_{out} + b_{zy}y_{out} \\ x_{in}^1 &= a_x + b_{xx}x_{out} + b_{xy}y_{out} \end{aligned} \right\} + O(|x_{out}|^2 + |y_{out}|^2).$$

(II) $E^s(p_0) \subset \Sigma$

Cette fois, on a $z_{in}^1 \in \Sigma^\perp$ mais $y_{out} \in \Sigma$ et obtient

$$\left. \begin{aligned} z_{in}^1 &= b_{zx}x_{out} \\ x_{in}^1 &= a_x + b_{xx}x_{out} + b_{xy}y_{out} \end{aligned} \right\} + O(|x_{out}|^2 + |y_{out}|^2).$$

La différence entre (I) et (II) est, que le coefficient b_{zy} est forcé à zéro par symétrie, ce qui va changer légèrement les équations de bifurcation.

Remarque

b_{zy} est forcé à zéro par symétrie, ssi il existe $\gamma \in G \cap G^\sigma$, tq

$$\gamma |_{E^s(p_0)} = -\gamma |_{E^u(p_1)}.$$

3) Résolution des équations de bifurcation

On remplace dans (I), resp. (II), x_{out}, y_{out} et z_{in} par les développements en variables de Shilnikov, et obtient:

$$(4) \quad x = a_x + r(b_{xy}\delta + \varphi_y + R_y) + b_{xx}(\varphi_x + R_x) + O(r)$$

et

$$(5)_{I/II} \quad \begin{aligned} r^{\nu_0}(\delta + \varphi_x + R_x) &= r(b_{zy}(\delta + \varphi_y + R_y) + b_{zx}(\varphi_x + R_x) + O(r)) \\ \text{ou} \quad r^{\nu_0}(\delta + \varphi_x + R_x) &= r(b_{zx}(\varphi_x + R_x) + O(r)). \end{aligned}$$

Comme x_{out} et y_{out} sont $C^1(r, x, \alpha)$ dans un voisinage de $r = 0$ et la linéarisation de (4) par rapport à x dans $r = 0$ est l'identité, donc inversible, on peut résoudre (4) avec le théorème de fonctions implicites et obtient une fonction

$$\begin{aligned} x : (-r_0, r_0) \times (-\alpha_0, \alpha_0) &\mapsto S_{in}^s \\ (r, \alpha) &\mapsto x(r, \alpha) \end{aligned}$$

avec $x(r, \alpha) = a_x(\alpha) + r(b_{xy}\delta + b_{xy}\varphi_y + b_{xx}\varphi_x) + o(r)$,
 φ_x et φ_y évalués dans $x = a_x(\alpha)$.

On porte ces expressions dans (5) et cherche des solutions $r(\alpha)$ bifurquées de la solution triviale $r(0) = 0$.

La condition de résonance implique $\nu_0(0) = 1$ et $\nu_0'(0) \neq 0$. Après un changement du paramètre régulier, on suppose, que $\nu_0(\alpha) = 1 + \alpha$.

Les équations de bifurcation s'écrivent alors

$$(6)_I \quad r^{1+\alpha}(\delta + \varphi_z + R_z) = r(b_{zy}(\delta + \varphi_y + R_y) + b_{zx}(\varphi_x + R_x) + O(r))$$

ou

$$(6)_{II} \quad r^{1+\alpha}(\delta + \varphi_z + R_z) = r(b_{zx}(\varphi_x + R_x) + O(r)).$$

3)_I Résolution de (6)_I

On développe

$$\begin{aligned} \varphi_i(x(r, \alpha), \alpha) &= \varphi_i(x(0, \alpha), \alpha) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\dots) \cdot \frac{\partial x}{\partial r}(0, \alpha) \cdot r + o(r) \\ &= \varphi_i^0 + O(r) \end{aligned}$$

d'où on obtient les deux cas

$$\begin{aligned} (i) \quad \alpha > 0 : \quad r^\alpha(\delta + \varphi_z^0) &= b_{zy}\delta + b_{zx}\varphi_x^0 + b_{zy}\varphi_y^0 + O(r^\omega) \\ \text{ou } (ii) \quad \alpha < 0 : \quad \delta + \varphi_z^0 &= r^\alpha(b_{zy}\delta + b_{zx}\varphi_x^0 + b_{zy}\varphi_y^0) + O(r^\omega) \end{aligned}$$

On rappelle que $\omega < 1$. Les termes $O(r^\omega)$ sont C^1 pour $r > 0$ et vérifient pour $\alpha, r \rightarrow 0$:

$$\|D_r D_\alpha^k O(r^\omega)\| = O(r^{\omega-1}).$$

On pose

$$\begin{aligned} \tau &= r^\alpha, \\ A(\alpha) &= \delta + \varphi_z^0, \\ B(\alpha) &= b_{zy}\delta + b_{zx}\varphi_x^0 + b_{zy}\varphi_y^0. \end{aligned}$$

Notons, que $\varphi_z^0 = \varphi_z(a_x, \alpha) = O(|a_x|^2 + \delta^2) = O(\delta^2)$ parce que $a_x = a_x(\alpha) = o(\delta)$.
Alors, pour δ petit, on trouve

$$A(0) > 0$$

Une condition immédiate est la condition nécessaire de bifurcation

$$B(0) > 0.$$

Car $B(0)$ dépend de Π et A en est indépendant, on peut supposer, éventuellement après une petite perturbation de F loin des équilibres, que

$$\left| \frac{B(0)}{A(0)} \right| \neq 1.$$

Ensuite, on va appliquer le lemme suivant :

Lemme 3.7[Chow,Deng,Fiedler,5.1]

Considérons l'équation

$$r^\alpha = c(\alpha) + \phi(r^\omega, \alpha)$$

avec $c \in C^1$, $\omega > 0$, $\phi(r^\omega, \alpha) = O(r^\omega)$, $D_r \phi(r^\omega, \alpha) = O(r^{\omega-1})$ pour $r \geq 0$ et supposons, que $c(0) < 1$.

Alors, pour $\alpha \leq 0$, il n'y a pas de solution $r \geq 0$ petit.

Pour $\alpha > 0$, il existe une branche de solution $r(\alpha) = \tau(\alpha)^{1/\alpha}$, $\tau(\alpha) \in C^1$ et $\tau(0) = c(0)$.

Corollaire 3.8

Supposons $B > 0$.

Si $\frac{B(0)}{A(0)} < 1$,

(6)_I possède une branche unique de solution $r(\alpha)$, bifurqué de $r(0) = 0$ tq $r^\alpha \in C^1$ pour $\alpha \geq 0$,

pour α négatif, il n'y a pas de petites solutions.

Si $\frac{B(0)}{A(0)} > 1$,

le même résultat est valable pour α de signe opposé.

Démonstration (du corollaire)

(6)_I s'écrit

$$\begin{array}{ll} (i) & r^\alpha = B/A + O(r^\omega), \quad \text{si } B/A < 1 \\ \text{ou} & (ii) \quad r^{-\alpha} = A/B + O(r^\omega), \quad \text{si } B/A > 1 \end{array}$$

Démonstration (du lemme)

On va refaire et expliciter la démonstration de [Chow,Deng,Fiedler] pour notre formulation légèrement différente.

Posons $\tau = r^\alpha$ et $\phi(r^\omega) = \phi(\tau^{\omega/\alpha}) = 0$ pour $\alpha < 0$. On calcule les dérivées suivantes

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \tau} &= \phi'(\tau^{\omega/\alpha}) \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ &= \frac{O(\tau^{\frac{\omega}{\alpha}-1})}{\alpha} \rightarrow 0, \text{ si } \alpha \searrow 0, \tau \rightarrow c(0) < 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} &= \phi'(\tau^{\omega/\alpha}) \tau^{1/\alpha} \log \tau / (-\alpha^2) \\ &= O(\tau^{\omega/\alpha}) / \alpha^2 \rightarrow 0, \text{ si } \alpha \searrow 0, \tau \rightarrow c(0) < 1\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^+ \phi}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\phi(\tau^{\omega/\alpha})}{\alpha} = 0$$

pour montrer, que $\Psi(\tau, \alpha) = \tau - c(\alpha) + \phi(\omega^{\tau/\alpha}) \in C^1$ et, que $\Psi(\tau, \alpha) = 0$ peut être résolu avec le théorème de fonctions implicites.

3) II Résolution de (7) II

Ici, on obtient

$$\begin{aligned}(i) \quad &\alpha > 0 \quad A\tau = B + O(\tau^{\omega/\alpha}) \\ (ii) \quad &\alpha < 0 \quad A = B\tau + O(\tau^{\omega/\alpha})\end{aligned}$$

où cette fois $B = b_{zx}\varphi_x^0$ avec les mêmes résultats.

Rappel

Les branches bifurquées correspondent à des orbites périodiques au voisinage du cycle, car $(x_{out}, y_{out}) = O(r)$, ce qui donne aussi la convergence des orbites hors d'un voisinage des équilibres vers le cycle homocline.

3.4.3 Les différents types de symétrie

Regardons les équations pour un autre élément de symétrie $\tilde{\sigma} \in \sigma G$.

L'équation

$$\tilde{\sigma}^{-1} \Pi((x_{out}, y_{out})(r, x, \alpha), \alpha) = (x_{in}, z_{in})(r, x, \alpha)$$

est équivalente à

$$\sigma^{-1} \Pi((x_{out}, y_{out})(r, x, \alpha), \alpha) = \kappa(x_{in}, z_{in})(r, x, \alpha)$$

pour un $\kappa = \sigma^{-1} \tilde{\sigma} \in G$. Si on dénote l'action diagonale de κ dans les voisinages de p_0 et p_1 par $\kappa(z, y, x) = (\kappa_z z, \kappa_y y, \kappa_x x)$, le développement est changé en

$$\begin{aligned}\kappa_z z_{in}^1 &= b_{zx} x_{out} + b_{zy} \kappa_y y_{out} + O(\dots) \\ \kappa_x x_{in}^1 &= a_x + b_{xx} x_{out} + b_{xy} \kappa_y y_{out} + O(\dots).\end{aligned}$$

Note, que, dans G , il existe toujours un κ , tq

$$\begin{aligned}\kappa|_{E^u(p_0)} &= -id \text{ et} \\ \kappa|_{E^s(p_0)} &= id.\end{aligned}$$

Rappelons, que $\Sigma = Fix(H)$. Dans H , il existe $\tilde{\kappa}$, qui laisse Σ fixe, mais agit d'une manière non-triviale dans un sous-espace invariant donné, orthogonal à Σ , par exemple comme $-id$ dans $E^u(p_1)$. $\kappa = \sigma^{-1}\tilde{\kappa}\sigma \in G$ agit donc d'une manière triviale dans $E^s(p_0) = \sigma^{-1}E^s(p_1)$ et non-triviale dans $E^s(p_0) = \sigma^{-1}E^s(p_1)$.

Les équations sont alors changées en

$$\begin{aligned}-z_{in}^1 &= b_{zx}x_{out} + b_{zy}y_{out} + O(..) \\ \kappa_x x_{in}^1 &= a_x + b_{xx}x_{out} + b_{xy}y_{out} + O(..)\end{aligned}$$

Comme $a_x \in \Sigma$, $x(0, \alpha) = a_x(0) = \kappa a_x(0)$, n'est pas changé, les φ_x^0 et φ_y^0 restent invariants, et, dans l'équation de bifurcation (6)_{I/II}, B est changé en $-B$. Dans les notations du théorème, on a trouvé la bijection entre L et \hat{L} , ce qui est la multiplication avec l'élément de symétrie κ .

Remarque

L'existence de cette élément κ est liée aux contraintes, que les valeurs propres simples imposent sur la symétrie du problème.

3.4.4 L'orbite de groupe des orbites bifurquées

On a tout fait pour finir la démonstration du théorème. Il reste à démontrer que pour tous les $\tau \in G \cap G^\sigma$, τq_σ , symétrique à l'orbite périodique q_σ , appartient à une branche bifurquée symétrique.

Rappelons, que $\Pi((y_{out}, x_{out})(r, x, \alpha))$ et $(z_{in}, x_{in})(r, x, \alpha)$ sont équivariants par $G \cap G^\sigma$. Si x est solution de (3)

$$(z_{in}, x_{in})(r, x, \alpha) = \sigma^{-1}\Pi((x_{out}, y_{out})(r, x, \alpha), \alpha),$$

τx est solution de

$$\begin{aligned}(z_{in}, x_{in})(r, \tau x, \alpha) &= \tau(z_{in}, x_{in})(r, x, \alpha) \\ &= \tau\sigma^{-1}\Pi((x_{out}, y_{out})(r, x, \alpha), \alpha) \\ &= \tau\sigma^{-1}\tau^{-1}\Pi((x_{out}, y_{out})(r, \tau x, \alpha), \alpha).\end{aligned}$$

Note, que

$$(\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})^{-1} = \tau^{-1}\sigma\tau \in \sigma G.$$

Autrement dit, on a trouvé

$$\tau q_\sigma = q_{\tau\sigma\tau^{-1}} = q_{\sigma^\tau}.$$

3.4.5 L'unicité

On a démontré la bifurcation d'orbites périodiques q_σ , qui passent au voisinages des équilibres $\sigma^i p_0$ et possèdent la symétrie $\sigma q_\sigma = q_\sigma$. Maintenant, on montrera que tous les orbites bifurquées de Q_σ possèdent cette symétrie.

Les équations de bifurcation s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} z_{in}^{i+1}(x_{i+1}, r_{i+1}) &= b_{zx}^i x_{out}^i(x_i, r_i) + b_{zy}^i y_{out}^i(x_i, r_i) \\ x^{i+1} &= a_x^i + b_{xx}^i x_{out}^i(x_i, r_i) + b_{xy}^i y_{out}^i(x_i, r_i) \end{aligned} \right\} + O(|x_{out}^i(x_i, r_i)|^2 + |y_{out}^i(x_i, r_i)|^2)$$

avec $i \bmod N$. Comme le flot est équivariant par σ , les équations se simplifient en

$$\left. \begin{aligned} z_{in}(x_{i+1}, r_{i+1}) &= b_{zx} x_{out}(x_i, r_i) + b_{zy} y_{out}(x_i, r_i) \\ x_{i+1} &= a_x + b_{xx} x_{out}(x_i, r_i) + b_{xy} y_{out}(x_i, r_i) \end{aligned} \right\} + O(|x_{out}(x_i, r_i)|^2 + |y_{out}(x_i, r_i)|^2).$$

Remarquons, que l'équivariance implique aussi, que, si $((x_0^0, r_0^0), \dots, (x_{N-1}^0, r_{N-1}^0))$ est solution, $((x_{N-1}^0, r_{N-1}^0), (x_0^0, r_0^0), \dots, (x_{N-2}^0, r_{N-2}^0))$ est aussi solution. Les équations

$$x_{i+1} = a_x + b_{xx} x_{out}(x_i, r_i) + b_{xy} y_{out}(x_i, r_i) + O(|x_{out}(x_i, r_i)|^2 + |y_{out}(x_i, r_i)|^2)$$

peuvent, comme dans 3.4.2 (3), être résolues par le théorème de fonctions implicites. On obtient

$$x_i(r) = a_x + O(r).$$

On se sert des notations $r = (r_i)_{0 \leq i \leq N-1}$ et $r^\omega = \sum r_i^\omega$.

Remarquons que, si $r_i = r_0$ pour tout i , alors $x_i(r) = x_j(r)$.

En portant ces expressions dans les autres équations, on obtient

$$r_{i+1}^{1+\alpha} A(\alpha) = r_i (B(\alpha) + O(r^\omega))$$

où A et B sont définis comme dans 3.4.2. 3). Notons aussi que $x_j = x_k$ à l'ordre zéro et que A et B sont donc indépendants de i .

Par symétrie on conclut que, si $(r_0^0, \dots, r_{N-1}^0)$ est solution, $(r_{N-1}^0, r_0^0, \dots, r_{N-2}^0)$ sera aussi solution.

Notre système d'équations possède la solution symétrique $r_i = r_j$ pour tout i, j sous les conditions sur B et α , données dans 3.4.2 3). On va, pour finir la démonstration du théorème, démontrer, que cette solution symétrique, est la seule solution.

En remplaçant les équations l'une dans l'autre, on obtient

$$r_j^{(1+\alpha)^N} = r_j (B/A + O(r^\omega)) (B/A + O(r^\omega))^{1+\alpha} \dots (B/A + O(r^\omega))^{(1+\alpha)^{N-1}}$$

où les termes $O(r^\omega)$ sont différentiables avec $D_{r_i} O(r^\omega) = O(\sum_{l \neq i} r_l^\omega + r_i^{\omega-1})$.

En divisant par r_j , on en déduit

$$r_j^{\alpha\beta} = (B/A)^\beta + \Phi(r^\omega), \beta = \frac{(1+\alpha)^N - 1}{\alpha} = \sum_{k=0}^{N-1} (1+\alpha)^k.$$

On vérifie sans problème que $D_{r_i}\Phi(r^\omega) = O(\sum_{i \neq j} r_i^\omega + r_i^{\omega-1})$.

Le système d'équations obtenu possède une solution unique, bifurquée de $r(0) = 0$. En effet, suivant la démonstration du lemme 3.7, on sait résoudre ce système par rapport aux variables $\tau_i = r_i^\alpha$ avec le théorème de fonctions implicites.

3.5 Deux exemples

Dans \mathbb{R}^3 , la dynamique au voisinage d'un cycle dans des plans de symétrie est restreinte, parce que les plans séparent l'espace dans des quadrants invariants. Des orbites au voisinage restent dans le même quadrant.

Dans \mathbb{R}^4 la situation est plus riche, ce que montrent les deux exemples suivants.

1) Symétrie T_h dans \mathbb{R}^4

Considérons

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + x(ax^2 + by^2 + cz^2) + duyz \\ \dot{y} = \lambda y + y(ay^2 + bz^2 + cx^2) + duxz \\ \dot{z} = \lambda z + z(az^2 + bx^2 + cy^2) + duyx \\ \dot{u} = \mu u - u^3 + exyz, \end{cases}$$

équivariant par l'action de T_h dans \mathbb{R}^4 , engendrée par

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tau_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans les plans invariants xy, yz et zx se trouve le cycle homocline, str.st., décrit dans le chapitre 1, sous les conditions d'existence

$$a < 0, a + b + c < 0 \text{ et } b < a < c.$$

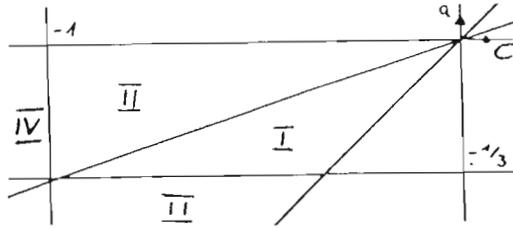
Supposons un instant, après un changement d'échelle, que $\lambda = 1$ et $a + b + c = -1$.

La linéarisation autour de l'équilibre $p_0 = (\sqrt{-\frac{\lambda}{a}}, 0, 0, 0)$ est

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{c}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \frac{1+c}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

La position des valeurs propres, dépendant de a et de c est montrée dans le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ll}
I) & \mu_x < \mu_y < -\mu_z < 0 \\
III) & \mu_x < -\mu_z < \mu_y < 0 \\
II) & \mu_y < \mu_x < -\mu_z < 0 \\
IV) & \mu_y < -\mu_z < \mu_x < 0
\end{array}$$



Dans le cas d'une bifurcation $I \rightarrow III$, la direction générique n'est pas incluse dans Σ , le plan xz , dans le cas d'une bifurcation $II \rightarrow IV$, elle appartient à Σ . Avec un changement de variables difféomorphe, global

$$\Theta : (x, y, z, u) \mapsto (x, y, z, u) \cdot \frac{|p_0(\alpha)|}{|p_0(0)|},$$

on se place dans les hypothèses du théorème, où les points d'équilibres du cycle restent fixes, quand le paramètre de bifurcation varie.

Rappelons, que τ_y et τ_z dénotent les réflexions par rapport aux plans $y = 0$ resp. $z = 0$. Dans le sous-groupe d'isotropie de p_0 :

$$G = \{\iota, \tau_z, \tau_y, \tau_z \tau_y\}$$

seulement ι et τ_y appartiennent à $G \cap G^\rho$.

Les branches d'orbites périodiques bifurquées, ayant une symétrie ρ ou $\tau_y \rho \tau_y^{-1} = \rho \tau_z \tau_y$, sont symétrique par la réflexion τ_y . De même pour les branches avec une symétrie $\rho \tau_z$ ou $\rho \tau_y$.

Alors, dépendant du flot au voisinage du cycle, on trouve des orbites périodiques bifurquées, soit avec une symétrie ρ ou $\rho \tau_z \tau_y$, soit avec une symétrie $\rho \tau_z$ ou $\rho \tau_y$. Elles explorent, soit trois, soit six points d'équilibre.

En fait, pour un cycle dans \mathbb{R}^3 , on ne trouve que les orbites avec une symétrie ρ ou $\rho \tau_z \tau_y$. Dans \mathbb{R}^4 , les coefficients de Π : b_{zx} et b_{zy} peuvent avoir un signe quelconque. Les deux cas de bifurcation sont possibles et ont été observés numériquement.

2) Symétrie D_{2d} dans \mathbb{R}^4

Considérons

$$\begin{cases}
\dot{x} &= \lambda x + xz + cx(x^2 + y^2) + duy \\
\dot{y} &= \lambda y - yz + cy(x^2 + y^2) - dux \\
\dot{z} &= \mu z - x^2 + y^2 - z^3 \\
\dot{u} &= \epsilon u + u^3 - xyz,
\end{cases}$$

équivariant par l'action de D_{2d} dans \mathbf{R}^4 , engendré par

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \tau_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans les plans invariants xz et yz se trouve le cycle homocline, str.st., décrit dans chapitre 1, si les coefficients λ, μ et c permettent.

La linéarisation autour de l'équilibre $p_0 = (0, 0, \sqrt{\mu}, 0)$ est

$$L = \begin{pmatrix} \lambda - \sqrt{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \sqrt{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Si le cycle existe au voisinage d'une 1:1-résonance, le théorème s'applique comme pour le premier exemple.

Le sous-groupe de p_0 consiste de

$$G = \{\iota, \tau_x, \tau_y, \tau_x \tau_y\},$$

Cette fois $G \cap G^\rho = G$. Mais, comme dans l'autre exemple ρ et $\rho \tau_x \tau_y$ (resp. $\rho \tau_x$ et $\rho \tau_y$) donnent des branches bifurquées symétriques. Les orbites périodiques correspondantes passent pendant une période au voisinage de deux (resp. quatre) points d'équilibre. Comme pour le cycle avec symétrie T_h , dans \mathbf{R}^3 , seulement les symétries ρ et $\rho \tau_x \tau_y$ sont possible, dans \mathbf{R}^4 , les deux possibilités de symétrie ont été observées numériquement.

Appendice

La linéarisation des équilibres d'une bifurcation Y_h

La matrice de la linéarisation dans un point (x, y, z) est

$$L(x, y, z) = \lambda id + a \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 + z^2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & 3y^2 + x^2 + z^2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & 3z^2 + x^2 + y^2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} (\tau^4 z^2 + y^2 - 6\tau^2 x^2)(\tau^2 y^2 - z^2) & \dots & \dots \\ y(-4\tau^4 x^3 + 2x((\tau^6 - 1)z^2 + 2\tau^2 y^2)) & \dots & \dots \\ z(4\tau^2 x^3 + 2x(-y^2 + \tau^6 y^2 - 2\tau^4 z^2)) & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Isotropie D_5

Pour $z = 0, x = \tau y$, sur l'axe de symétrie, les équilibres bifurqués vérifient

$$\lambda + a(1 + \tau^2)y^2 - 3\tau^5 y^4 = 0 \implies y^2(\lambda) = -\frac{\lambda}{a(1 + \tau^2)} + \frac{6b\tau^5}{a^3(1 + \tau^2)^3} + O(|\lambda|^3)$$

et donc

$$L = \lambda c_1 A + \lambda^2 c_2 B + O(|\lambda|^3)$$

où

$$c_1 = -2/5, \quad c_2 = \frac{2b\tau^5}{5(1 + \tau^2)^2}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} \tau + 2 & 2\tau - 1 & 0 \\ 2\tau - 1 & 3 - \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14\tau + 12 & 14 - 28\tau & 0 \\ 14 - 28\tau & 14\tau - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}.$$

Pour les mêmes directions propres

$$v_1 = (\tau, 1, 0), \quad v_2 = (1, -\tau, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1),$$

A possède les valeurs propres

$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

et B possède les valeurs propres

$$\lambda_1 = -30, \lambda_2 = 40, \lambda_3 = 40$$

ce qui montre, que, pour λ petit, L est inversible.

Isotropie D_3

Pour $x = y = z$ sur l'axe de symétrie, les équilibres bifurqués vérifient

$$\lambda + 3ax^2 + b(1 + 2\tau)x^4 = 0 \implies x^2 = -\frac{\lambda}{3a} - \frac{b(1 + 2\tau)}{27a^3}\lambda^2 + O(|\lambda^3|)$$

et donc

$$L = \lambda c_1 A + \lambda^2 c_2 B + O(|\lambda|^3)$$

où

$$c_1 = -2/3, \quad c_2 = -\frac{2b(1 + 2\tau)}{27a^2}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -5 \\ -5 & 7 & -5 \\ -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

L est donc inversible pour λ petit.

Isotropie D_2

Pour $x = y = 0$ sur l'axe de symétrie, les équilibres bifurqués vérifient

$$\lambda + az^2 = 0 \implies z^2 = -\frac{\lambda}{a}$$

et donc

$$L = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \lambda^2 \frac{b\tau^2}{a^2} \begin{pmatrix} -\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(|\lambda|^3),$$

aussi inversible pour λ petit.

Existence d'équilibres avec isotropie sous-maximale

On montre, qu'il n'y a pas d'équilibres bifurqués avec une isotropie sous-maximale dans les plans de symétrie. Comme tous les plans de symétrie sont conjugués, il suffit de considérer le plan $z = 0$.

On va déterminer les solutions de

$$\begin{cases} \lambda + a(x^2 + y^2) + b(y^2 - 2\tau^2 x^2)\tau^2 y^2 = 0 \\ \lambda + a(x^2 + y^2) - b(\tau^4 x^2 - 2\tau^2 y^2)x^2 = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, la solution possède une isotropie D_2 . La différence des deux équations donne

$$\tau^2 y^4 - 2\tau^4 x^2 y^2 + \tau^4 x^2 - 2\tau^2 x^2 y^2 = 0.$$

Posant $\alpha = \frac{y^2}{x^2}$, on obtient

$$\tau^2 \alpha^2 - 2(\tau^2 + 1)\alpha + 1 = 0.$$

Les deux solutions de cette équation sont exactement les deux directions des axes d'isotropie D_5 et D_3 .

Bibliographie

- [Armbruster,Guckenheimer,Holmes] Heteroclinic cycles and modulated travelling waves in systems with $O(2)$ symmetry, *Phys. D* 29(1988),257-282.
- [Chow,Deng,Fiedler] Homoclinic bifurcation at resonant eigenvalues, *preprint, Konrad-Zuse-Zentrum fuer Informationstechnik.*
- [Deng] Shilnikov problem, exponential expansion, strong λ -Lemma, C^1 -Linearization and homoclinic bifurcation, *preprint*
- [Dos Reis] Structural stability of equivariant vector fields on two manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1984) 283.
- [Field] Equivariant bifurcation theory and symmetry breaking, *preprint, University Sydney.*
- [Field,Swift] Stationary bifurcation to limit cycles and heteroclinic cycles, *preprint*
- [Guckenheimer,Holmes] Structurally stable heteroclinic cycles, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*(1988),103.
- [Jaric,Michel,Sharp] Zeros of covariant vector fields for the point groups: invariant formulation, *J. Physique* 45(1984)
- [Lin] Using Melnikov's methods to solve Shilnikov's problems, *preprint.*
- [Melbourne] Intermittency as a codimension three phenomenon, *J. Dyn. and Diff. Eqns.*,1(4)(1989), 347-367.
- [Melbourne,Chossat,Golubitsky] Heteroclinic cycles involving periodic solutions in mode interactions with $O(2)$ symmetry, *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh*,113A,1989
- [Sattinger] Group theoretic methods in bifurcation theory, *Lect. Notes in Math.* 762, Springer.
- [Vanderbauwhede,Fiedler] Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems, *preprint.*